

Thèse

présentée à

l'UNIVERSITE de PAU et des PAYS de l'ADOUR

Ecole Doctorale des Sciences Exactes et de leurs
applications

par

Frank PRAT

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Analyse du Generalized Screen Propagator

Soutenue le 9 Février 2005

Après avis de :

Mme	A-S. BONNET-BEN DHIA	Directeur de Recherche, ENSTA & CNRS	Rapporteur
M.	M. DE HOOP	Professeur, Colorado School of Mines	Rapporteur
M.	O. LAFITTE	Professeur, Université Paris 13	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de :

M.	M. AMARA	Professeur, UPPA	Président
Mlle	H. BARUCQ	Maître de Conférences HDR, UPPA	Directrice de Thèse
M.	B. DUQUET	Ingénieur de Recherche, IFP	Examinateur
M.	J. GUILBOT	Ingénieur de Recherche, Total	Examinateur

Remerciements

Ce travail a bénéficié du support financier de Total par le biais d'un contrat de recherche passé avec le Laboratoire de Mathématiques Appliquées. Je tiens à remercier monsieur Henri Calandra (Total-Houston) qui est à l'origine de ce sujet et grâce à qui j'ai pu réaliser la préparation de cette thèse dans des conditions idéales.

Je commencerais par remercier madame Hélène Barucq pour m'avoir encadré pendant ces trois années. Son aide fût pour moi inestimable et a été une source supplémentaire de motivation. Je souhaite aussi exprimer ma reconnaissance à monsieur Bertrand Duquet qui a été mon interlocuteur privilégié à Total, notamment pour les aspects géophysiques et programmations.

Je voudrais aussi remercier madame Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, messieurs Maarten De Hoop et Olivier Lafitte pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. L'intérêt qu'ils ont porté à mon sujet et la pertinence de leurs questions m'ont permis d'améliorer de façon drastique la présentation de mes résultats.

J'exprime également mes remerciements à messieurs Mohamed Amara et Jérôme Guilbot pour leur participation à mon jury de thèse.

Je souhaite remercier les membres du département Méthodes et Techniques Sismiques (MTS) du centre de recherche de Total à Pau pour m'avoir accueilli pendant la majorité du temps de ma thèse, ainsi que le Service Informatique Scientifique et Technique pour avoir toujours su trouver une solution à mes problèmes Unix. Je remercie Nathalie et Paul Cristini du Laboratoire de Géophysique de Pau pour nos discussions enrichissantes sur la physique des ondes.

Et pour finir, je voudrais saluer toutes les personnes qui m'ont accompagné autant professionnellement qu'amicalement, et notamment les thésards, stagiaires, les personnes des sections de Karting et de Volley-ball de Total.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités sur les opérateurs pseudo-différentiels	5
1.1 Classe des symboles	6
1.2 Représentation intégrale de Fourier	7
1.3 Symboles à variables séparées	9
1.4 Une autre représentation des opérateurs	10
1.5 Règles de calcul symbolique	11
1.6 Les ω -opérateurs pseudo-différentiels	12
2 Modèle physique	13
2.1 Modèle initial	13
2.2 Système réduit	16
2.3 La formulation GSP	18
2.4 Modèle GSP et approximation de Born	26
2.5 Comparaison avec le modèle one-way de Zhang <i>et al</i>	29
2.6 Le Paraxial et le modèle GSP	34
2.7 Un nouveau modèle GSP	37
3 Présentation du code et des modèles de vitesse utilisés	47
3.1 Principales étapes de la résolution	48
3.2 Série de Bremmer appliquée à un cas simple	51
3.3 Organigramme du programme	59
3.4 Présentation des cas test	64
4 Generalized Screen Propagator	71
4.1 Opérateur de propagation	71
4.2 Décomposition	80
4.3 Approximation de Padé sur le propagateur	80
5 Analyse et optimisation de l'opérateur de réflexion	87
5.1 Introduction	87
5.2 Opérateur de réflexion	88
5.3 Opérateur de réflexion approché	92
5.4 Analyse par onde plane	95
5.5 Résultat avec un point de tir	103

5.6	Traitement des singularités	105
6	Résultats numériques	117
6.1	Un premier cas test	117
6.2	Calcul exact	118
6.3	Test sur les propagateurs	121
6.4	Test sur les opérateurs de réflexion	124
6.5	Conclusion	136
7	Le modèle GSP avec PML	149
7.1	Un modèle couplé GSP-PML	149
7.2	Tests numériques	151
	Conclusion	155
A	Calcul de $\sigma(A_{-1})$	157
B	Détails des différentes composantes de l'algorithme	159
B.1	L'opérateur Γ_0 et l'opérateur de décomposition Γ_0^{-1}	159
B.2	Calculs pour l'opérateur de réflexion	160
B.3	Calculs pour l'opérateur de propagation	161

Introduction

L'imagerie sismique permet d'obtenir une image des discontinuités d'un milieu (sous-sol) donné. Ces discontinuités représentent l'interface entre les différentes roches composant le milieu et les géologues peuvent ensuite traiter l'image obtenue afin de reconstruire les structures géologiques. Les données sismiques sont acquises à partir de l'explosion d'une source en surface ($z = 0$) qui génère un champ d'onde. Ce champ se propage dans le sous-sol et rencontre à un moment donné des discontinuités traduisant les changements de propriétés physiques du milieu. L'onde est alors diffractée dans toutes les directions ce qui donne naissance aux champs d'onde réfléchis. Une partie de ces champs réfléchis va se propager vers la surface et va être captée par les géophones. On obtient alors un enregistrement du temps de parcours depuis l'explosion de la source. Ce temps de trajet représente la réponse sismique du milieu à l'explosion de la source et son tracé constitue le sismogramme (réponse sismique). Le sismogramme représente la réflexion primaire, puis les réflexions multiples. A l'heure actuelle, seule la première réflexion est facilement interprétable.

L'imagerie du sous-sol peut se faire par inversion de l'équation des ondes. Dans le cas où le milieu de propagation est complexe (présence de fortes hétérogénéités se traduisant par un profil de vitesse à variations parfois brutales), la résolution de l'équation des ondes par une méthode d'éléments finis couplée à des PML (Perfectly Matched Layers) est tout à fait réalisable mais est synonyme d'une charge de calcul très lourde [57]. Certes, à l'heure actuelle, on dispose de moyens de calcul dont les capacités s'améliorent à une vitesse fulgurante. Ceci justifie sûrement qu'une partie de la communauté scientifique juge mineur de chercher à résoudre autre chose que l'équation des ondes complète, dans l'idée de diminuer les coûts numériques. Vues sous cet angle, les limitations à résoudre l'équation des ondes ont une durée de vie relativement courte. Mais c'est sans songer à la résolution du problème inverse qui constitue, d'ailleurs, le véritable challenge car il est au centre de nombreuses applications stratégiques (secteurs médical, pétrolier, militaire, etc) dont certaines sont tellement cruciales qu'elles justifient l'obtention de résultats rapidement. Or, le problème inverse repose sur la résolution d'une série de problèmes directs et on comprend très bien qu'il est important de disposer d'un code de résolution du problème direct à la fois précis (les sismogrammes sont corrects au moins du point de vue cinématique) et rapide (on minimise le temps de convergence de l'algorithme d'inversion). A ce jour, une alternative est proposée par les méthodes asymptotiques comme le tracé de rayons. On gagne de façon très considérable sur les temps de calcul mais au détriment de la précision des résultats, d'autant plus que la tecto-

nique est complexe. Sur ce sujet, nous renvoyons aux travaux de V. Farra [35, 36] et à sa bibliographie. Toujours dans le registre des méthodes asymptotiques, les travaux de J.D. Benamou, O. Lafitte, R. Sentis et I. Sollicet [14, 13] semblent ouvrir une piste très intéressante qui à ce jour n'a pas été exploitée dans le secteur pétrolier.

Dans ce mémoire, on va s'intéresser à une méthode asymptotique où le caractère asymptotique apparaît au niveau des opérateurs. En fouillant dans la littérature, on constate que cette approche a germé dans l'esprit des chercheurs depuis relativement longtemps. Seul le manque d'outils mathématiques appropriés peut expliquer le fait que sa mise en place ait mis du temps dans le cas de problèmes de scattering en milieu hétérogène. Tout commence avec les solutions WKB (Wentzel-Kramer-Brillouin, souvent WKBJ de façon à reconnaître aussi le travail de Jeffries) qui sont une approximation de la solution de l'équation des ondes et correspondent à l'exemple le plus commun de calcul semi-classique en mécanique quantique. En 1951, H. Bremmer [17] a voulu apporter une correction à l'approximation WKBJ dans le cas d'un milieu 1D quelconque. Il s'agit d'un très joli travail bâti sur une intuition physique et qui débouche sur l'écriture de la solution sous forme d'une série, la série dite de Bremmer. Le premier terme de la série correspond à la solution WKBJ et s'exprime comme le produit des coefficients de transmission associés à chaque sous-intervalle définissant le milieu de propagation. Le travail de H. Bremmer est considérable de deux points de vue. Tout d'abord, la série de Bremmer est composée de termes dont le rôle est clairement identifiable. Le premier terme correspond au champ directement transmis, le second terme contient la partie du champ qui provient de la première réflexion interne, etc. Ensuite, la série de Bremmer offre un procédé systématique pour générer des corrections de la solution WKBJ.

Si les séries asymptotiques sont le plus souvent divergentes, les séries de Bremmer ont l'avantage d'être éventuellement convergentes. En 1D, leur convergence a été établie à plusieurs reprises par des méthodes différentes [5, 12, 41, 53]. Il s'agit donc d'un procédé de construction de la solution de l'équation des ondes qui est tout aussi séduisant pour le physicien que pour le mathématicien.

Plus tard, J.F. Claerbout [22] a introduit un système d'équations one-way dans le but de faire de la migration par équation des ondes. Il considère des équations one-way qui sont des approximations paraboliques (ou paraxiales) du problème exact. Ces équations s'obtiennent en décomposant le champ d'onde le long d'une direction privilégiée. Le champ a ainsi deux composantes, l'une se propageant dans la direction choisie, et l'autre en sens inverse. On écrit en fait l'opérateur Dirichlet-Neumann et son approximation donne naissance aux équations paraxiales. Puis en 1975, J.P. Coronas [26] a remis en scène les séries de Bremmer dans le but de corriger les équations paraboliques qui sont au 2D ce que la solution WKBJ est au 1D. On notera que ce n'est qu'en 1986 que H. Mc Maken [64] a étudié le problème de la convergence des séries de Bremmer considérées par J. Coronas. Il montre sur un exemple que la convergence peut avoir lieu si les opérateurs de couplage, liant les deux composantes du champ d'onde après décomposition, sont bornées.

Un peu plus tard, J. Gazdag [38] a développé la méthode Phase-Shift. Cette méthode s'applique indépendamment de la dimension mais la vitesse de propagation ne doit dépendre que de la profondeur. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de calculer le champ propagé à partir de l'opérateur de propagation exact, à l'opposé des modèles paraxiaux. La méthode phase-shift a ensuite été étendue au cas d'une vitesse quelconque [39] en utilisant une interpolation (méthode Phase-Shift-Plus-Interpolation ou PSPI). Parallèlement, R.H. Hardin et F.D. Tappert [47] ont élaboré la méthode Split-step-Fourier. Cette méthode est initialement basée sur une approximation parabolique de l'équation des ondes acoustiques. Elle se compose d'un terme de phase-shift pour une vitesse constante et les variations latérales de vitesse sont prises en compte *via* une perturbation. En 1992, P.L. Stoffa et ses collaborateurs [65] y ont apporté une nette amélioration en assurant à la propagation d'être verticale.

Dans le but d'élargir l'horizon des problèmes mathématiques à une classe d'opérateur plus large que les opérateurs différentiels, L. Hörmander [48] a rédigé un énorme manuscrit sur l'analyse microlocale qui rassemble les théories des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs intégraux de Fourier, initiées par Kohn et Nirenberg [56] et Calderon et Zygmund [18]. Au premier abord, il s'agit de théories complexes mais elles semblent détenir la clé qui permet d'unir tous les travaux précédemment cités. A notre connaissance, le premier article qui va dans ce sens est un article de M.V. de Hoop [30]. En utilisant le calcul pseudo-différentiel, l'auteur met en place une méthode qui généralise de façon systématique, et rigoureuse à la fois, les résultats de H. Bremmer à la ND, $N \geq 2$. On retrouve la même idée que celle exploitée par J.F. Claerbout [22] à savoir, on projette le champ d'onde le long d'un axe privilégié (la profondeur z ici) et le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels permet de dériver un système d'équations one-way exact dans lequel les termes de couplage interviennent de façon naturelle. La solution est calculée sous forme d'un développement de Bremmer et on généralise de fait l'approche [17]. Le développement en série de Bremmer revient à décomposer le problème en une succession de problèmes de scattering élémentaires et chaque terme de la série s'obtient *via* l'inversion d'un opérateur de Dirichlet-Neumann. On retrouve une idée développée dans [27] et [59] pour l'étude de la diffraction par une pointe. Les résultats de M.V. de Hoop ont donné naissance à de nombreuses publications qui seront citées tout au long de ce mémoire. Parmi elles, la thèse de J. Le Rousseau [61] a été pour nous un travail de référence puisqu'il s'agit d'analyser la méthode GSP à partir du code de simulation 2D développé par J. Le Rousseau et que nous avons étendu en vue du tracé de sismogrammes 2D et 3D.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Dans un premier chapitre, nous avons rassemblé quelques éléments d'analyse micro-locale qui nous sont apparus essentiels dans notre travail. Le second chapitre est consacré au modèle GSP. Pour sa dérivation, nous adoptons un autre point de vue que dans [30]. Nous nous plaçons dans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels classiques ce qui nous permet de construire une famille de modèles GSP à laquelle appartient le modèle [30].

Ensuite, il s'agit de situer le modèle GSP parmi des modèles plus standards. Cela nous conduit à développer un modèle GSP avec approximation de Born, à comparer le propagateur GSP au propagateur développé par Zhang *et al.* [69]. Enfin, on envisage aussi le couplage de la méthode GSP avec des équations paraxiales qui ont été proposées dans [33]. Le chapitre 3 est adressé au lecteur intéressé par les aspects numériques de ce travail. On y trouve une description du code de calcul ainsi que la présentation des cas tests que nous avons considérés. Dans le chapitre 4, on développe tous les aspects liés à la propagation. Le couplage fait l'objet du chapitre 5 où on étudie en détail l'opérateur de réflexion. Le chapitre 6 est dédié aux résultats numériques. Ils sont réalisés, pour l'essentiel, en dimension deux d'espace. On montre que le GSP classique est excellent dans le cas d'un milieu formé de couches horizontales. Il suffit d'incliner les couches pour voir les résultats se dégrader. On montre que le modèle GSP-Paraxial donne de meilleurs résultats dans ce cas. Un inconvénient de la méthode est occasionné par l'utilisation des FFT. Celles-ci génèrent des périodicités artificielles qui polluent le tracé des temps d'arrivée. Au dernier chapitre, nous montrons qu'en introduisant des PML dans le modèle GSP, on peut éliminer ces périodicités. Malheureusement, les PML contribuent à diminuer l'amplitude de la solution. Du travail reste donc à faire dans cette direction.

Chapitre 1

Généralités sur les opérateurs pseudo-différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels sont des généralisations des opérateurs différentiels. Leur conception se justifie par le besoin d'inverser des opérateurs différentiels elliptiques, voire paraboliques si on sort du cadre des opérateurs classiques. Historiquement, l'analyse micro-locale, qui regroupe la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs intégraux de Fourier, est née des travaux de Hörmander [48] et de Kohn et Nirenberg [56] publiés en 1965.

Dans ce chapitre, nous avons regroupé les notions de base de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Pour cela, nous avons utilisé essentiellement les ouvrages de Taylor [66] et de Trèves [67] dans lesquels le lecteur intéressé trouvera plus de détails ainsi qu'une bibliographie détaillée sur le sujet.

Pour commencer, considérons la représentation intégrale de Fourier :

$$f(\mathbf{x}) = \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$$

où $\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$ est la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}.$$

On utilisera aussi la notation $\mathcal{F}(\varphi)$ et $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ pour désigner la transformée de Fourier et sa transformée inverse, notamment lorsque l'expression de φ est compliquée car la notation $\widehat{\varphi}$ devient alors peu lisible. On note $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\mathbf{D}^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

En tenant compte de la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\alpha f(\mathbf{x}) &= \mathbf{D}^\alpha \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi}^\alpha e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

on voit que si on considère un opérateur différentiel linéaire $p(\mathbf{x}, \mathbf{D}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{D}^\alpha$,

on a la relation :

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{D})f(\mathbf{x}) = \int \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \quad (1.1)$$

où $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi}^\alpha$.

La fonction $p = p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est généralement appelée série formelle de $p(\mathbf{x}, \mathbf{D})$ et nous renvoyons le lecteur intéressé à [28] où le cas particulier des opérateurs différentiels est traité en détail.

Afin de définir un opérateur pseudo-différentiel, on va utiliser la représentation (1.1) en considérant la fonction $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ dans une classe spécifique mais bien plus générale que la classe associée aux opérateurs différentiels. Ici, on va se limiter à une classe de fonctions qui est bien adaptée pour l'opérateur des ondes à savoir la classe S^m et nous renvoyons à [66] ou [67] pour la définition plus générale des espaces $S_{p,\delta}^m$.

1.1 Classe des symboles

Un opérateur pseudo-différentiel va se définir par une représentation du type (1.1) et $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ sera qualifié de symbole pour l'opérateur plutôt que série formelle. Ce changement de vocabulaire est tout à fait justifié car, dans le cas général d'un opérateur pseudo-différentiel, la fonction $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ n'est plus polynômiale. Pour l'équation des ondes, une classe de symboles bien adaptée est définie par la classe S^m dont nous donnons immédiatement la définition.

Définition 1.1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Le symbole $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ appartient à la classe S^m , s'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Alors $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et pour tout K compact inclus dans Ω , pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{K,\alpha,\beta}$ telle que

$$|\mathbf{D}_x^\beta \mathbf{D}_\xi^\alpha p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leq C_{K,\alpha,\beta} (1 + |\boldsymbol{\xi}|)^{m-|\alpha|}$$

(ii) Il existe des fonctions régulières $p_{m-j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ homogènes de degré $m-j$ en $\boldsymbol{\xi}$ pour $|\boldsymbol{\xi}| \geq 1$ i.e.

$$p_{m-j}(\mathbf{x}, r\boldsymbol{\xi}) = r^{m-j} p_{m-j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad |\boldsymbol{\xi}| \geq 1, |r| \geq 1$$

telles que

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

où le signe \sim signifie que

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \sum_{j=0}^N p_{m-j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^{m-(N+1)}.$$

En utilisant un raisonnement par récurrence, on montre les propriétés suivantes :

Propriété 1.2. Soient $p \in S^m$, $q \in S^l$, $m \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$D_x^\beta D_\xi^\alpha p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^{m-|\alpha|}$$

et

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^{m+l}.$$

Si de plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{-1}| \geq C(1 + |\boldsymbol{\xi}|)^m,$$

on dit que le symbole p est fortement elliptique et le symbole $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{-1}$ existe avec $p^{-1} \in S^{-m}$.

On voit donc que si on dérive un symbole par rapport à la variable primale \mathbf{x} , on ne change pas son degré d'homogénéité et le symbole dérivé reste dans la même classe. Seule la dérivation par rapport à la variable duale change le degré d'homogénéité. Cette propriété sera très utile à la fin du chapitre 2 où il sera question de dériver un nouveau modèle de propagation.

1.2 Représentation intégrale de Fourier

Si dans (1.1) on considère l'expression à droite du signe égal, avec $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^m$, on peut définir un opérateur P de la façon suivante :

$$Pf = \int p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}. \quad (1.2)$$

L'opérateur P est un opérateur pseudo-différentiel et si $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^m$, on dit que $P \in \text{OPS}^m$. Tout opérateur de OPS^m hérite de la propriété (ii) de la définition 1.1. Ainsi, il admet un développement asymptotique dans lequel chaque terme est un opérateur qui est repéré par son ordre, comme conséquence du développement du symbole de P en symboles homogènes. On dit alors que l'opérateur est classique. Généralement, les opérateurs pseudo-différentiels sont répertoriés comme appartenant à la famille des opérateurs classiques ou à la famille des opérateurs pseudo-classiques *i.e.* les opérateurs admettant un développement asymptotique par rapport à un petit paramètre.

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes. Si $P \in \text{OPS}^m$, $\sigma(P)$ désigne son symbole, $\sigma_P(P)$ son symbole principal, c'est-à-dire le premier terme dans le développement asymptotique de $\sigma(P)$ (*i.e.* le terme dont le degré d'homogénéité est le plus bas). La fonction $\sigma_j(P)$ représente le terme de S^j dans le développement asymptotique de $\sigma(P)$. Réciproquement, si $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^m$, on note $\text{Op}(p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}))$ l'opérateur de OPS^m dont le symbole est $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$.

On a le théorème suivant :

Théorème 1.3. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $P \in OPS^m$. Alors P est un opérateur continu :*

$$P : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega).$$

De plus, P se prolonge en une application continue :

$$P : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

On peut affiner l'intitulé de ce théorème en se plaçant dans le cadre des espaces de Sobolev. Nous renvoyons à [62] pour tout ce qui concerne ces espaces et à [19] pour l'utilisation de ce cadre pour les opérateurs pseudo-différentiels.

Théorème 1.4. *Soit $P \in OPS^m$. Pour tout réel s , $\varphi \mapsto P\varphi$ peut se prolonger en une application linéaire de $H^s(\Omega)$ dans $H_{loc}^{s-m}(\Omega)$.*

Une preuve de ce théorème se trouve dans [67].

On peut aussi considérer une autre classe d'opérateurs qui est, apparemment, plus générale que la classe des opérateurs pseudo-différentiels. Ces opérateurs sont de la forme

$$Qf = (2\pi)^{-3} \int \int q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\xi}} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}. \quad (1.3)$$

Le symbole $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$ est plutôt appelé amplitude et est supposé appartenir à la classe S^m où on remplace $\mathbf{x} \in \Omega$ par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega$ dans la définition 1.1.

Dans le but de récrire Qf sous la forme (1.2), on doit faire une hypothèse supplémentaire sur Q . On introduit la définition suivante :

Définition 1.5. *Soit Q une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$. Si $\text{supp}Q \cap (K \times \Omega)$ et $\text{supp}Q \cap (\Omega \times K)$ sont des compacts pour tout compact $K \subset \Omega$, on dit que Q est proprement supporté.*

On peut construire un opérateur \tilde{Q} proprement supporté à partir de n'importe quel opérateur $Q \in OPS^m$. En effet, supposons que Q est donné par (1.3) et considérons une fonction $r = r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dont le support est compact. L'opérateur \tilde{Q} d'amplitude $\tilde{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = r(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})$ est donc proprement supporté. On a alors un théorème établissant le lien entre les opérateurs représentés par (1.3) et les opérateurs de OPS^m représentés par (1.2).

Théorème 1.6. *Soit $Q \in OPS^m$ représenté par (1.3) et proprement supporté. Alors il existe $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in S^m$ tel que $Q = P$ où P est représenté par (1.2). De plus on a $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = e^{-\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} Q(e^{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}})$ et on a le développement asymptotique*

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_y^\alpha q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}.$$

Le théorème 1.6 nous autorise à supposer dans la suite que les opérateurs de OPS^m sont proprement supportés, sans plus de commentaires. En fait, tout opérateur de OPS^m est la somme d'un opérateur proprement supporté et d'un opérateur régularisant. Le théorème 1.6 est aussi très intéressant car il permet, un opérateur Q de OPS^m étant donné, de déterminer le symbole de Q soit à partir de Q lui même, soit à partir de son amplitude. Un autre résultat important est donné dans le théorème des noyaux de Schwartz qui, à l'origine, permet de caractériser les opérateurs continus de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 1.7. *Soit Q un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe une unique distribution $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$(Q\varphi)(\mathbf{x}) = \int K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

La distribution K est appelée le noyau de Q .

Dans le théorème précédent, nous avons représenté le crochet de dualité \mathcal{D}' , \mathcal{D} par une intégrale. Nous renvoyons à [19] pour une démonstration de ce théorème. Formellement, si on revient à la caractérisation (1.2), dans laquelle on intervertit les intégrations par rapport à $\boldsymbol{\xi}$ et à \mathbf{y} , on obtient :

$$Qf = \int K(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (1.4)$$

où

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\xi}}p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}.$$

Dans le cas particulier où p est homogène par rapport à $\boldsymbol{\xi}$, le noyau K est une distribution, homogène par rapport à \mathbf{z} , dépendant de \mathbf{x} de façon C^∞ . A tout opérateur $P \in \text{OPS}^m$, on peut donc associer un noyau $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ défini par :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}}p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}$$

où p est éventuellement indépendant de \mathbf{y} et dans ce cas, P est caractérisé par (1.2).

Remarque 1. En fait, ce sont les opérateurs de la forme (1.4) qui ont été étudiés les premiers par Calderon et Zygmund [18]. Ils sont à l'origine des premiers développements en calcul symbolique. Puis de nombreux travaux ont fait suite, comme les travaux déterminants de Kohn et Nirenberg [56] et d'Hörmander [48].

1.3 Symboles à variables séparées

Cette partie est motivée par les applications numériques développées dans ce travail. Notre but est de réaliser des simulations numériques dont la charge de calcul est compétitive par rapport à un code de différences finies. Nous allons considérer un

modèle dont le développement est fondé sur le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels et nous nous proposons de conserver ce formalisme dans la méthode numérique. Il s'agit donc de calculer des transformées de Fourier, ce qui, sans traitement préalable, peut être vite très coûteux et peu intéressant face à une méthode numérique standard. En effet, le calcul d'une expression du type

$$P\varphi = \int \widehat{\varphi}(\xi)p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}, \quad (1.5)$$

où φ désigne une fonction-test régulière, requiert le calcul d'une transformée de Fourier pour chaque valeur de x car le symbole p dépend à la fois de \mathbf{x} et de $\boldsymbol{\xi}$. Par contre, dans le cas particulier où le symbole $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est de la forme

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = p_1(\mathbf{x})p_2(\boldsymbol{\xi}),$$

une seule transformée de Fourier est à effectuer puisque P est représenté par la formule :

$$P\varphi = p_1(\mathbf{x}) \int \widehat{\varphi}(\xi)p_2(\boldsymbol{\xi})e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} = (2\pi)^3 p_1(\mathbf{x})\mathcal{F}(\widehat{\varphi} p_2)(-\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

Il serait donc intéressant de travailler avec une classe particulière d'opérateurs dont le symbole est à variables séparées. Hélas, cette propriété n'est pas vérifiée naturellement par l'équation des ondes. Ceci justifiera qu'on procède plus loin à des approximations (du type Taylor) des symboles, ces approximations étant motivées par le soucis de réduire les coûts de calcul de la méthode numérique.

1.4 Une autre représentation des opérateurs

Dans la majorité des ouvrages consacrés aux opérateurs pseudo-différentiels, on considère la représentation (1.2). Cependant, dans les travaux précurseurs de Kohn et Nirenberg ([56]), on trouve une autre représentation des opérateurs de la forme :

$$\mathcal{F}(P\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{x})p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}. \quad (1.7)$$

Dans le cas particulier où le symbole p est polynomial et par exemple de la forme $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}^{\alpha}$, la formule (1.7) représente l'opérateur $\sum_{\alpha} \mathbf{D}^{\alpha} a_{\alpha}(\cdot)$ tandis que (1.2) représente l'opérateur $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(\cdot)\mathbf{D}^{\alpha}$. Les deux quantifications ne sont donc pas équivalentes et sont généralement appelées quantification qp pour (1.2) et quantification pq pour (1.7).

Dans le cas particulier d'un symbole à variables séparées, en reprenant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, (1.7) s'écrit :

$$\mathcal{F}(P\varphi) = \frac{p_2(\cdot)}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{x})p_1(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x} = p_2(\cdot)\mathcal{F}(\varphi p_1)(\cdot) \quad (1.8)$$

On obtient donc que :

$$P\varphi = \int p_2(\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}(\varphi p_1)(\boldsymbol{\xi})e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi} \quad (1.9)$$

et la complexité en calcul est la même que pour la première représentation. On peut alors se demander pourquoi, dans le cas d'un symbole à variables séparées, considérer (1.7) à la place de (1.2). En fait, il semblerait que la représentation (1.7) est numériquement plus stable que (1.2). A ce jour, nous n'avons trouvé aucune justification à cela, seuls les tests numériques que nous avons réalisés donnent envie de penser que cette propriété est vérifiée.

Remarque 2. Le procédé de quantification a été initialement introduit par Weyl qui avait utilisé une autre formule que (1.2) et (1.7) :

$$P\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} p\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \boldsymbol{\xi}\right) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi}.$$

On parle de quantification symétrique ou de quantification de Weyl. Dans ce travail, nous nous sommes contentés de travailler avec les quantifications qp et pq .

1.5 Règles de calcul symbolique

On ne considère que des symboles dans la classe S^m et les opérateurs concernés sont donc dans la classe OPS^m .

Dans [67], on peut consulter tout un chapitre dédié aux règles de calcul pour les opérateurs pseudo-différentiels classiques. Ici, nous nous focaliserons sur deux règles de calcul qui sont utiles dans la suite.

La première règle concerne la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels.

Théorème 1.8. Soient $P \in OPS^m$ et $Q \in OPS^l$, où $m \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On note $p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ et $q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ leurs symboles respectifs. On a alors :

$$\sigma(PQ) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\boldsymbol{\xi}}^{\alpha} p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Le théorème 1.8 montre aussi que $\sigma(PQ) \neq \sigma(QP)$ en général. Ceci conduit à introduire le commutateur $[P, Q] = PQ - QP$. On a alors :

Corollaire 1.9. Soient $P \in OPS^m$, $Q \in OPS^l$. L'opérateur $[P, Q]$ est élément de OPS^{m+l-1} et son symbole principal est donné par le crochet de Poisson :

$$\sigma_P([P, Q]) = \{p, q\} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial q}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial \xi_j} \right)$$

Le théorème 1.8 permet aussi de calculer le symbole de l'inverse d'un opérateur P de OPS^m . On a :

Corollaire 1.10. Soit $P \in OPS^m$ de symbole principal $p_m \in S^m$ fortement elliptique et de symbole p . Alors P est inversible d'inverse P^{-1} dans OPS^{-m} . Le symbole principal de P^{-1} est donné par p_m^{-1} et son symbole q est défini par la formule

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_{\boldsymbol{\xi}}^{\alpha} p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 1.$$

L'expression du symbole q s'obtient en appliquant la formule de composition du théorème 1.8 avec $Q = P^{-1}$. En cherchant le symbole q sous forme d'un développement asymptotique, c'est-à-dire :

$$q \sim \sum_{j \geq -m} q_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

on peut calculer chaque fonction homogène q_j en identifiant les termes ayant même degré d'homogénéité. Ainsi, on trouve que le symbole principal de P^{-1} est l'inverse du symbole principal de P . Des exemples d'application de cette formule sont donnés plus loin.

1.6 Les ω -opérateurs pseudo-différentiels

Nous finissons ce chapitre en présentant un calcul qui est particulièrement adapté pour l'opérateur des ondes, qui sera l'opérateur de référence pour ce travail.

Dans le cas de problèmes d'évolution, on considère plutôt comme variable primale le couple (t, \mathbf{x}) où t désigne la variable temporelle et \mathbf{x} représente la variable spatiale. La variable duale associée est notée $(\omega, \boldsymbol{\xi})$ où ω est liée à t et $\boldsymbol{\xi}$ est duale de \mathbf{x} . Dans ce cadre, le symbole p d'un opérateur pseudo-différentiel dépend des variables $t, \mathbf{x}, \omega, \boldsymbol{\xi}$. Dans le cas particulier où p ne dépend pas de t , Hörmander [48] a introduit le ω -calcul. Ce calcul s'adresse au symbole q défini par :

$$q(\mathbf{x}, \omega, \boldsymbol{\eta}) = p(\mathbf{x}, \omega, \omega \boldsymbol{\eta}).$$

Si P désigne l'opérateur pseudo-différentiel représenté par l'intégrale oscillante (1.1), on a alors :

$$\int e^{-i\omega t} (P\varphi)(t, \mathbf{x}) dt = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} e^{i\omega(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\eta}} q(\mathbf{x}, \omega, \boldsymbol{\eta}) \varphi(\mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\eta}. \quad (1.10)$$

Dans le cas particulier de l'opérateur des ondes $\partial_t^2 - \Delta$, le symbole p ne dépend pas du temps et s'écrit $p(\mathbf{x}, \omega, \boldsymbol{\xi}) = \omega^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2 = \omega^2(1 - \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{\omega^2})$. Ici, $\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\omega}$ et on a la relation $p(\mathbf{x}, \omega, \boldsymbol{\xi}) = \omega^2 q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ avec $q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = 1 - \boldsymbol{\eta}^2$. On peut donc associer à l'opérateur des ondes un opérateur Q d'ordre 0 dont le symbole est la fonction q et $Q = Q(\mathbf{x}, \frac{1}{i\omega} D_{\mathbf{x}})$. Cette propriété de l'opérateur des ondes a été exploitée dans [4] pour le développement de conditions de radiation complète d'ordre élevé et dans [58], O. Lafitte applique le ω -calcul pour la construction d'une condition d'impédance généralisée.

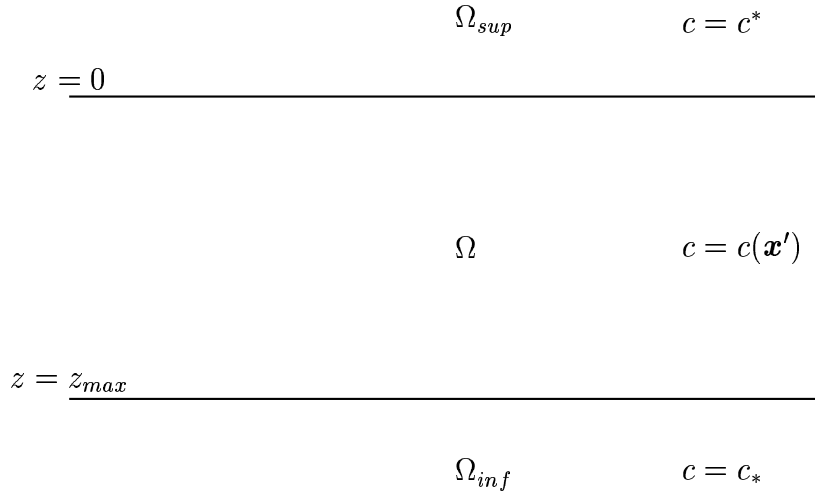
Chapitre 2

Modèle physique

Ce chapitre est consacré à la description du modèle que l'on va résoudre numériquement. Il s'agit d'un système du premier ordre équivalent à l'équation des ondes. Ce modèle a été initialement dérivé par M.V. De Hoop [30] et, comme lui, nous l'appellerons modèle GSP (Generalized Screen Propagator). Notre but est essentiellement de tracer des sismogrammes. Ceux-ci représentent des temps de trajets d'une ou plusieurs ondes émises à la surface de la terre et sont utilisés pour imager le sous-sol car ils permettent la localisation des interfaces entre les différents milieux constituant le domaine de propagation. Le tracé de sismogrammes n'avait pas été envisagé par Jérôme Le Rousseau [61], ce qui explique qu'il sera intéressant de comparer, au moins d'un point de vue théorique, le modèle GSP avec d'autres modèles qui sont déjà utilisés pour le calcul de temps de trajets. Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On s'intéresse tout d'abord au modèle GSP et nous montrons comment il peut se dériver. Nous ne nous arrêtons pas à une simple description de la modélisation et nous montrons qu'on peut, en fait, dériver une infinité de modèles dont le modèle proposé par M.V. De Hoop. La classification de ces différents modèles n'est hélas pas très claire. Aussi, afin de disposer de résultats de référence, nous retiendrons le même modèle que Jérôme Le Rousseau. Ensuite, il s'agit de comparer ce modèle à des modèles approchés qui sont souvent utilisés pour inverser l'équation des ondes scalaire. Dans ce but, nous développons deux nouveaux modèles GSP dans lesquels on utilise une approximation de Born, pour le premier, et une équation paraxiale pour le second. Nous finissons le chapitre en développant un modèle GSP d'ordre plus élevé que le modèle classique, ce qui conduit notamment à l'obtention de nouvelles équations one-way.

2.1 Modèle initial

La prospection sismique utilise la propagation des ondes pour imager une portion du sous-sol. On place des récepteurs à la surface de la région sous-terrainée considérée et on calcule les temps de trajet entre le ou les émetteurs et les récepteurs. Ainsi, on peut localiser les interfaces entre les différents milieux constituant le sous-sol. Dans

FIG. 2.1 – *Définitions des régions.*

la suite, la portion de sous-sol à analyser est notée

$$\Omega = \{ \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq z_{max} \}$$

où la variable z représente la profondeur, orientée positivement vers le bas et de valeur maximale z_{max} . Les régions au-dessus et en dessous de Ω ne sont pas à analyser. Comme dans [42], on va donc supposer qu'elles sont remplies d'un fluide homogène ce qui se traduira par le fait que toute onde se propageant à une profondeur négative (c'est-à-dire en domaine aérien) ou supérieure à z_{max} (c'est-à-dire en dessous de la portion de sous-sol considérée) ne sera pas enregistrée par les récepteurs. En d'autres termes, une onde sera forcément transmise (et perdue du point de vue des récepteurs) à l'interface $z = 0$ ou $z = z_{max}$ sans aucune réflexion et pour les calculs, seule la zone Ω sera prise en compte. On fait donc l'hypothèse que le milieu de propagation est constitué de trois régions infinies (voir Fig. 2.1) dans la direction transverse $\mathbf{x}' = {}^t(x, y)$ notées respectivement Ω_{sup} , Ω et Ω_{inf} avec :

$$\Omega_{sup} = \{ \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \leq 0 \},$$

et

$$\Omega_{inf} = \{ \mathbf{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \geq z_{max} \}.$$

On suppose que les deux milieux Ω_{sup} et Ω_{inf} sont homogènes. On note c^* la vitesse de propagation supposée constante dans Ω_{sup} et c_* la vitesse supposée constante dans Ω_{inf} . Le phénomène est régi par l'équation des ondes dont la solution est une pression acoustique notée $p = p(t, \mathbf{x})$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{1}{v^2} \partial_t^2 p - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho \nabla p) = S \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times]0, T[, \\ p(0, \mathbf{x}) = \partial_t p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $v = v(\mathbf{x})$ désigne la vitesse de propagation et vaut $c = c(\mathbf{x})$ dans le milieu à étudier Ω , c^* dans Ω_{sup} et c_* dans Ω_{inf} . La fonction $\rho = \rho(\mathbf{x})$ représente la densité ou masse volumique du milieu. Elle est supposée indépendante du temps t , constante dans les couches délimitant Ω et varie suivant toutes les directions dans Ω . La source S est une fonction de Ricker représentant une source de type impulsion. Si ν_* représente une fréquence donnée, S est de la forme :

$$S(t, \mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{x}_s} \partial_t (2\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 (t - t_*)^2) e^{-\alpha^2 (t - t_*)^2})$$

où $\delta_{\mathbf{x}_s}$ désigne la masse de Dirac au point $\mathbf{x}_s = {}^t(x_s, y_s, 0)$, $\alpha = \pi\nu_*$ et $t_* = 1/\nu_*$. On utilise les notations standards du calcul différentiel, à savoir : ∂_t désigne la dérivée partielle par rapport au temps, si ∂_i représente la dérivée partielle par rapport à $i = x, y, z$, on note $div \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$ la divergence d'un champ de vecteurs \mathbf{v} de composantes v_x, v_y, v_z et l'opérateur ∇ désigne le gradient d'une fonction, soit $\nabla \varphi = {}^t(\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi)$. Le modèle (2.1) se dérive à partir de deux lois de la mécanique des milieux continus (voir par exemple [40]) qui font intervenir le vecteur vitesse dans le fluide $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = {}^t(u_x, u_y, u_z)$. La première concerne la conservation de la quantité de mouvement et s'écrit : pour $i = x, y, z$,

$$\rho \frac{\partial(u_i)}{\partial t} = div \boldsymbol{\sigma}_i + f_i \quad (2.2)$$

où $\mathbf{f} = {}^t(f_x, f_y, f_z)$ désigne la densité volumique des forces extérieures. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ exprime les lois de comportement du fluide dont les lignes sont notées $\boldsymbol{\sigma}_i$ avec $i = x, y, z$. On utilise la notation :

$$div \boldsymbol{\sigma}_i = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Dans le cas particulier d'un fluide parfait, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ s'exprime très simplement en fonction de la pression :

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI_3$$

où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. La loi (2.2) s'écrit alors sous la forme :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (2.4)$$

En prospection sismique, les forces extérieures sont le plus souvent négligeables. Par contre, on émet un signal de type impulsion ce qui se traduit par une deuxième loi inhomogène, à savoir la loi de conservation de la masse :

$$\frac{1}{v^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial t} + div \mathbf{u} = q, \quad (2.5)$$

où $q = q(t, \mathbf{x})$ représente un taux d'injection par unité de masse. En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.4) et en dérivant l'équation (2.5) par rapport au temps, on peut éliminer le vecteur vitesse \mathbf{u} et on obtient que le champ de pression p est solution de l'équation des ondes avec $S = \partial_t q$. On a donc ici :

$$q(t, \mathbf{x}) = 2\delta_{\mathbf{x}_s} \alpha^2 (1 - 2\alpha^2 (t - t_*)^2) e^{-\alpha^2 (t - t_*)^2}$$

L'équation des ondes (2.1) peut donc se récrire sous forme d'un système hyperbolique du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \rho \partial_t (\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{0} & \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R}^3, \\ \frac{1}{v^2 \rho} \partial_t p + \operatorname{div} \mathbf{u} = q & \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R}^3, \\ p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (2.6)$$

Un modèle GSP a pour propriété de décrire la propagation d'une onde en privilégiant une direction, à savoir la profondeur dans le contexte des applications à la géophysique. Dans cette optique, on choisit de considérer comme modèle initial le système (2.6) plutôt que l'équation (2.1).

2.2 Système réduit

Le problème initial est donc donné par (2.6). On rappelle que les données initiales sont supposées nulles. En prospection sismique, il est fréquent de privilégier l'axe de profondeur pour étudier le phénomène de propagation d'ondes, ce qui signifie qu'on va exprimer la propagation des ondes le long de l'axe Oz . Cette approche a d'abord été utilisée dans [17] puis dans [26, 1] où on cherchait des solutions sous forme d'ondes planes homogènes se propageant dans un milieu simple constitué de couches planes homogènes. De cette façon, on se ramenait à la résolution d'un système matriciel à coefficients constants et on obtenait une expression de la solution sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs propres de la matrice associée au problème. Il s'avère que cette démarche a été fructueuse pour l'étude de la propagation d'ondes planes dans un faisceau de couches homogènes (voir [17] pour le cas 1D) et la théorie développée dans [26] propose une extension à la 2D. Mais dans le cas d'un milieu plus complexe, les paramètres constitutifs ρ et c du domaine considéré Ω varient suivant toutes les directions. On ne peut donc utiliser cette méthode sans passer par le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels, comme cela a été suggéré par M.V. de Hoop dans [30]. Cette démarche avait déjà été utilisée par Taylor [66] pour l'étude de la propagation des singularités au voisinage d'une surface dans un système strictement hyperbolique, l'axe Oz correspondant à la direction de la normale à la surface. Elle a ensuite été reprise par plusieurs auteurs pour la construction de conditions de radiations pour l'électromagnétisme [2, 15, 46] et c'est M.V De Hoop qui, le premier, a eu l'idée de l'appliquer pour étudier la propagation des ondes acoustiques et élastiques dans le sous-sol. Notre étude va porter sur le calcul de temps de trajet à partir du modèle développé par M.V. de Hoop. C'est pourquoi nous décrivons dans la suite les principales étapes de cette modélisation.

Dans toute la suite, on ne considère plus que la solution dans le domaine d'étude Ω . Ayant supposé que dans Ω , le système est au repos jusqu'à l'instant initial, on peut éliminer la variable temporelle en appliquant une transformée de Fourier partielle en temps où la variable duale de la variable temps t est notée ω . Le système (2.6) se transforme alors en un système stationnaire, qui, posé dans Ω , s'écrit de la façon

suiuante :

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \widehat{p} + i\omega (\rho \widehat{\mathbf{u}})' = \mathbf{0}, \\ \partial_z \widehat{p} + i\omega (\rho \widehat{u}_z) = 0, \\ \frac{i\omega}{\rho c^2} \widehat{p} + \operatorname{div}_{\perp} (\widehat{\mathbf{u}})' + \partial_z \widehat{u}_z = \widehat{q}, \end{cases}$$

où $\nabla_{\perp} = {}^t (\partial_x, \partial_y)$, $\widehat{\mathbf{u}}' = {}^t (\widehat{u}_x, \widehat{u}_y)$ et $\operatorname{div}_{\perp} \widehat{\mathbf{u}}' = \partial_x \widehat{u}_x + \partial_y \widehat{u}_y$. Dans tout ce qui précède, $\widehat{\varphi}$ représente la transformée de Fourier partielle en temps de φ . La variable temps étant éliminée, on cherche à récrire le système en privilégiant la variable profondeur. Pour cela, on élimine l'inconnue tangentielle $\widehat{\mathbf{u}}'$ en injectant la première équation du système dans la troisième. On obtient ainsi un système à deux inconnues de la forme :

$$(\mathbf{D}_z + L) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

avec $\mathbf{U} = {}^t (\widehat{p}, \widehat{v}_z)$, $\mathbf{D}_z = \mathbb{I}_2 \partial_z$ et \mathbb{I}_2 représente l'opérateur identité d'ordre deux. L'opérateur L est défini par :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & i\omega\rho \\ \frac{i\omega}{c^2\rho} + \operatorname{div}_{\perp} \left(\frac{1}{i\omega\rho} \nabla_{\perp} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

et la source \mathbf{F} est donnée par $\mathbf{F} = {}^t (0, \widehat{q})$.

En factorisant par $i\omega$, l'opérateur L s'écrit sous la forme $L = i\omega L^{\sharp}$ où

$$L^{\sharp} = L^{\sharp} \left(\mathbf{x}', \frac{1}{\omega} \partial_{\mathbf{x}'} \right)$$

est défini par :

$$L^{\sharp} = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \frac{1}{c^2\rho} + \frac{1}{\omega^2} \operatorname{div}_{\perp} \left(\frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la théorie développée par Hörmander [48], l'opérateur L^{\sharp} est un opérateur pseudo-différentiel de OPS⁰ dépendant du paramètre ω , et si on note \mathcal{L}^{\sharp} son symbole, on a la représentation suivante : pour toute fonction-test φ ,

$$L^{\sharp} \varphi = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \mathcal{L}^{\sharp} \left(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{k}'}{\omega} \right) \varphi(\mathbf{s}') e^{-i(\mathbf{x}' - \mathbf{s}') \cdot \mathbf{k}'} d\mathbf{s}' d\mathbf{k}'$$

où $\mathbf{s}' = {}^t (s_x, s_y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{k}' = {}^t (k_x, k_y)$ est la variable duale de \mathbf{x}' telle que le symbole de ∇_{\perp} est $i\mathbf{k}'$.

Le symbole de L est défini par :

$$\mathcal{L}^{\sharp} = \mathcal{L}_0^{\sharp} + \mathcal{L}_{-1}^{\sharp} = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \frac{1}{\rho c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2 \rho} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-i}{\omega^2 \rho^2} \nabla_{\perp} \rho \cdot \mathbf{k}' & 0 \end{pmatrix}$$

avec $|\mathbf{k}'|^2 = k_x^2 + k_y^2$. Le symbole \mathcal{L}^{\sharp} est la somme de deux symboles qui sont ordonnés selon le degré d'homogénéité de leurs termes respectifs. Chaque terme de \mathcal{L}_0^{\sharp} est

un symbole de S^0 et le terme non nul de \mathcal{L}_{-1}^\sharp appartient à S^{-1} . Dans la suite, on adoptera la notation $L_0^\sharp = \text{Op}(\mathcal{L}_0^\sharp)$ et $L_{-1}^\sharp = \text{Op}(\mathcal{L}_{-1}^\sharp)$.

Le symbole \mathcal{L}^\sharp est d'ordre 0. Il admet un développement asymptotique par rapport au paramètre $\frac{|k'|}{\omega}$ qui est petit à haute fréquence, c'est-à-dire lorsque ω est grand. L'opérateur \mathcal{L}^\sharp peut donc aussi être vu comme un opérateur semi-classique. Par contre, le symbole de l'opérateur $L = i\omega L^\sharp$ admet un développement asymptotique par rapport au petit paramètre ω^{-1} . On se retrouve donc dans le cadre du ω -calcul développé par Olivier Lafitte dans [58] et l'opérateur L peut être considéré comme un opérateur ω -pseudo-différentiel dont la définition a été donnée au chapitre 1. Cette propriété ne sera exploitée qu'à la fin du chapitre pour la construction d'un nouveau modèle GSP.

Remarque 3. Le symbole \mathcal{L}_{-1}^\sharp est directement lié aux variations latérales de ρ . Si la densité est constante ou ne dépend que de z , le symbole \mathcal{L}^\sharp est exactement dans la classe S^0 car \mathcal{L}_{-1}^\sharp est nul. Le modèle est donc plus simple à écrire.

Résoudre (2.7) conduit à une description de la propagation du champ \mathbf{U} le long de la profondeur z . Le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels permet d'étendre l'approche classique pour la résolution de systèmes différentiels à coefficients constants qui consiste à diagonaliser la matrice L . Dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels (ou des opérateurs différentiels à coefficients variables), Taylor [66] a développé une méthode de diagonalisation pour des systèmes strictement hyperboliques. Cette méthode permet de remplacer le système de départ par un système de deux équations one-way (l'une va décrire la propagation vers le bas et l'autre sera associée à la propagation vers le haut) couplées par une matrice anti-diagonale (termes de réflexion). Elle a été utilisée dans [30, 31], puis dans [61] pour les ondes acoustiques, dans un cadre plus simple où ρ est constant. On peut également noter que cette méthode a été développée dans [2] pour la construction de conditions de radiation en électromagnétisme. Nous reviendrons sur ce point car les résultats de [2] appliqués aux ondes acoustiques permettent d'établir un lien entre le modèle utilisé pour le GSP et les méthodes de résolution par équations paraxiales qui sont du même type que les conditions de radiation.

2.3 La formulation GSP

La formulation GSP s'écrit comme une équation de transport dont la dérivation repose sur la diagonalisation du symbole \mathcal{L}_0^\sharp . Commençons par décrire cette étape. Les valeurs propres de \mathcal{L}_0^\sharp sont données par les symboles γ_0 et $-\gamma_0$ avec

$$\gamma_0 = \left(\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} - \frac{|k'|^2}{\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Afin de définir la fonction racine carrée intervenant dans (2.8), on divise le plan \mathbb{R}^2 en trois régions. La première est définie par

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{k}'|^2 < \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \right\}.$$

Tant que $\mathbf{k}' \in \mathcal{H}$, la matrice \mathcal{L}_0^\sharp admet deux valeurs propres réelles simples. Dans cette zone, le système (2.6) est strictement hyperbolique et \mathcal{H} est appelée région hyperbolique. C'est dans cette région qu'il y a propagation et les deux valeurs propres étant de signe opposé, il y aura une partie se propageant dans le sens des z croissants (vers le bas) associée à la valeur propre γ_0 et une partie se propageant dans le sens des z décroissants (vers le haut) associée à la valeur propre $-\gamma_0$. La deuxième région est définie par

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{k}'|^2 > \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \right\}.$$

Si $\mathbf{k}' \in \mathcal{E}$, les valeurs propres de \mathcal{L}_0^\sharp sont imaginaires pures. Le système (2.6) est donc elliptique dans cette zone. La région \mathcal{E} est appelée région elliptique et correspond à la zone dans laquelle il n'y a pas de propagation. Enfin, on recouvre \mathbb{R}^2 en considérant la région $\mathcal{G} = \left\{ |\mathbf{k}'|^2 = \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \right\}$ dans laquelle le système (2.6) dégénère. En effet, la valeur propre zéro est double et le problème n'est ni hyperbolique ni elliptique. La région \mathcal{G} , appelée région *glancing*, est associée aux ondes rampantes.

On démontre alors le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et \mathbf{U} une solution du système réduit. Il existe au moins un opérateur $P_m \in OPS^m$ inversible d'inverse $Q_{-m} \in OPS^{-m}$ tel que si $\mathbf{V} = Q_{-m}\mathbf{U}$, \mathbf{V} est solution de :*

$$(\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0)\mathbf{V} = \mathbf{R}_0\mathbf{V} + Q_{-m}\mathbf{F} \quad (2.9)$$

où $\Lambda_0 \in OPS^0$ est un opérateur diagonal unique et $\mathbf{R}_0 \in OPS^0$ dépend de l'opérateur P_m .

Démonstration. Soit la matrice

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

Soit \mathcal{P} une matrice de passage de la base de vecteurs propres associés au couple $(\gamma_0, -\gamma_0)$ à la base canonique. Si $w = {}^t(w^+, w^-)$ désigne un de ces vecteurs propres, ses coordonnées sont liées par l'équation :

$$\rho w^- = \pm \gamma_0 w^+$$

qui admet une infinité de solutions. On propose alors de résoudre cette équation de telle sorte que les coordonnées des deux vecteurs propres retenus soient dans la même classe de symboles. Ainsi, si $S^m, m \in \mathbb{Z}$, désigne cette classe, la matrice de

passage, notée \mathcal{P}_m , a tous ses termes dans S^m et définit ainsi un opérateur de OPS m noté P_m . La matrice \mathcal{P}_m est inversible et son inverse \mathcal{P}_m^{-1} définit le symbole principal de l'opérateur inverse de P_m qui est noté Q_{-m} et appartient à OPS $^{-m}$. Au niveau symbolique, on a la relation

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{P}_m^{-1} \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_m$$

ce qui se récrit sous la forme :

$$\sigma(\Lambda_0) = \sigma_P(Q_{-m} L_0^\# P_m).$$

On en déduit qu'il existe un opérateur régularisant $\mathbf{R}_{-1} \in \text{OPS}^{-1}$ tel que

$$Q_{-m} L_0^\# P_m = \Lambda_0 + \mathbf{R}_{-1}. \quad (2.10)$$

L'opérateur \mathbf{R}_{-1} est défini de façon unique par son symbole dont l'expression est connue grâce à la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels qui a été rappelée au chapitre 1. Nous ne précisons pas encore l'expression de \mathbf{R}_{-1} car cela n'apporte rien ici.

Considérons maintenant \mathbf{U} une solution de (2.7). On pose $\mathbf{V} = Q_{-m} \mathbf{U}$. Alors, \mathbf{V} vérifie :

$$(\mathbf{D}_z + L) P_m \mathbf{V} = \mathbf{F}$$

et en composant à gauche par Q_{-m} , on obtient :

$$Q_{-m} (\mathbf{D}_z + L) P_m \mathbf{V} = Q_{-m} \mathbf{F}.$$

De plus, comme

$$\mathbf{D}_z P_m = P_m \mathbf{D}_z + \partial_z P_m$$

où $\partial_z P_m$ désigne l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est $\partial_z \mathcal{P}_m$, le système se transforme en :

$$(\mathbf{D}_z + Q_{-m} L P_m) \mathbf{V} + Q_{-m} \partial_z P_m \mathbf{V} = Q_{-m} \mathbf{F}.$$

Mais par définition de L , on a :

$$Q_{-m} L P_m = i\omega \left(Q_{-m} L_0^\# P_m + Q_{-m} L_{-1}^\# P_m \right)$$

ce qui entraîne, en tenant compte de (2.10),

$$(\mathbf{D}_z + i\omega \Lambda_0 + i\omega \mathbf{R}_{-1} + i\omega Q_{-m} L_{-1}^\# P_m + Q_{-m} \partial_z P_m) \mathbf{V} = Q_{-m} \mathbf{F}.$$

La proposition 2.1 est donc démontrée en posant :

$$\mathbf{R}_0 = -i\omega \left(\mathbf{R}_{-1} + Q_{-m} L_{-1}^\# P_m \right) - Q_{-m} \partial_z P_m.$$

■

Remarque 4. L'entier relatif m étant fixé, la matrice \mathcal{P}_m n'est pas unique. Cela signifie donc que même si on fixe m , on peut construire une infinité de modèles qui diffèrent tous au niveau de l'opérateur de couplage \mathbf{R}_0 .

Le modèle est donc défini à partir d'une équation de transport qui s'exprime comme un système d'équations one-way d'ordre 1. Au second membre, l'opérateur \mathbf{R}_0 prend en compte les termes de couplage modélisés par ses termes extra-diagonaux.

Notre but est de prendre en compte les variations latérales de vitesse dans le modèle. Cela signifie que, pour la masse volumique, on peut envisager tous les cas, à savoir ρ est constante, ne varie que par rapport à la profondeur ou varie dans toutes les directions. On peut remarquer que les variations latérales de la masse volumique sont prises en compte par l'opérateur L_{-1}^\sharp , lequel est du même ordre que l'opérateur \mathbf{R}_{-1} . Si on décide de négliger ce dernier, comme cela est fait dans [61] et si on veut considérer le cas où la masse volumique varie dans toutes les directions, cela signifie que le modèle sera incomplet. Toutefois, l'importance de cette remarque est à tempérer car d'un point de vue numérique, on va procéder à des approximations. Le nombre d'approximations va augmenter avec le nombre de termes pris en compte par le modèle. On peut donc se demander si les erreurs numériques ne seront pas du même ordre dans un modèle incomplet que dans un modèle complet.

Revenons maintenant sur l'opérateur de couplage \mathbf{R}_0 . On peut le décomposer en la somme de deux opérateurs, l'un étant défini par les termes diagonaux de \mathbf{R}_0 , l'autre par les termes extra-diagonaux. Notons alors

$$\mathbf{R}_0^b = \text{diag}(\mathbf{R}_0) \text{ et } \mathbf{R}_0^\sharp = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0^b.$$

En considérant cette décomposition, on construit un nouveau modèle dans lequel l'équation de transport diagonale est associée à la somme de deux opérateurs de OPS¹ et OPS⁰ respectivement. Il vient ainsi :

Corollaire 2.2. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Il existe au moins un opérateur $P_m \in OPS^m$ d'inverse $Q_{-m} \in OPS^{-m}$ tel que si \mathbf{U} désigne une solution du système réduit, $\mathbf{V} = Q_{-m}\mathbf{U}$ est solution de :

$$(\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \mathbf{R}_0^b) \mathbf{V} = \mathbf{R}_0^\sharp \mathbf{V} + Q_{-m} \mathbf{F} \quad (2.11)$$

L'intérêt du modèle présenté au corollaire 2.2 est qu'il s'écrit à partir de deux équations one-way parfaitement découplées et les termes de couplage sont isolés dans l'opérateur \mathbf{R}_0^\sharp . D'après sa définition, l'opérateur \mathbf{R}_0 est très délicat à déterminer de façon exacte car il est défini à partir d'un développement asymptotique explicitant son symbole. Il est clair qu'on ne peut compter déterminer exactement le symbole de \mathbf{R}_0 et qu'il faut se contenter d'une approximation obtenue en tronquant le développement. L'ordre de troncature est alors à déterminer. En partant du fait que le système réduit de départ est associé à un opérateur L donné comme la somme de deux opérateurs dans OPS¹ et OPS⁰ respectivement, nous proposons de conserver

cette propriété dans le modèle GSP. Il va donc être question de remplacer l'opérateur \mathbf{R}_0 par sa partie principale $\mathbf{R}_{0,P}$, c'est-à-dire l'opérateur dont le symbole est le symbole principal de \mathbf{R}_0 . On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 2.3. *Sous les mêmes hypothèses qu'à la proposition 2.1, on montre qu'un modèle GSP approché est donné par : si $\mathbf{V} = Q_{-m}\mathbf{U}$, \mathbf{V} est solution de*

$$(\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \mathbf{R}_{0,P}^\flat) \mathbf{V} = \mathbf{R}_{0,P}^\sharp \mathbf{V} + Q_{-m}\mathbf{F}, \quad (2.12)$$

où le symbole de $\mathbf{R}_{0,P}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{R}_{0,P}) &= -i\omega\mathcal{P}_m^{-1}\mathcal{L}_{-1}^\sharp\mathcal{P}_m - \omega \left\{ \mathcal{P}_m^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{L}_0^\sharp \right) \left(\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{P}_m \right) + \left(\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_m^{-1} \right) \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\sharp\mathcal{P}_m \right) \right\} \\ &- \mathcal{P}_m^{-1}\partial_z\mathcal{P}_m \end{aligned}$$

Démonstration. Il s'agit de calculer le symbole principal de \mathbf{R}_0 . Par définition,

$$\mathbf{R}_0 = -i\omega \left(\mathbf{R}_{-1} + Q_{-m}L_{-1}^\sharp P_m \right) - Q_{-m}\partial_z P_m$$

avec $\mathbf{R}_{-1} = Q_{-m}L_0^\sharp P_m - \Lambda_0$. On a donc :

$$\sigma(\mathbf{R}_{0,P}) = -i\omega\sigma_P \left(\mathbf{R}_{-1} + Q_{-m}L_{-1}^\sharp P_m \right) - \sigma_P(Q_{-m}\partial_z P_m). \quad (2.13)$$

On introduit la notation suivante. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux matrices dont les coefficients sont des symboles. Soit $\alpha = {}^t(\alpha_x, \alpha_y)$ un multi-indice de \mathbb{N}^2 . On note $\nabla_{\mathbf{k}'}^{(\alpha)}\mathcal{A}\nabla_{\mathbf{x}'}^{(\alpha)}\mathcal{B}$ le produit matriciel suivant :

$$\nabla_{\mathbf{k}'}^{(\alpha)}\mathcal{A}\nabla_{\mathbf{x}'}^{(\alpha)}\mathcal{B} = \sum_{|\beta|=|\alpha|} \partial_{\mathbf{k}'}^\beta\mathcal{A}\partial_{\mathbf{x}'}^\beta\mathcal{B}$$

où $\beta = {}^t(\beta_x, \beta_y) \in \mathbb{N}^2$, $\partial_{\mathbf{k}'}^\beta = \partial_{k_x}^{\beta_x}\partial_{k_y}^{\beta_y}$ et $\partial_{\mathbf{x}'}^\beta = \partial_x^{\beta_x}\partial_y^{\beta_y}$.

En appliquant la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels, on obtient :

$$\sigma_P \left(Q_{-m}L_{-1}^\sharp P_m \right) = \mathcal{P}_m^{-1}\mathcal{L}_{-1}^\sharp\mathcal{P}_m \text{ et } \sigma_P(Q_{-m}\partial_z P_m) = \mathcal{P}_m^{-1}\partial_z\mathcal{P}_m. \quad (2.14)$$

On a de plus, toujours en appliquant la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels,

$$\sigma \left(Q_{-m}L_0^\sharp P_m \right) = \mathcal{P}_m^{-1}\mathcal{L}_0^\sharp\mathcal{P}_m - i\mathcal{P}_m^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{L}_0^\sharp \right) \left(\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{P}_m \right) - i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_m^{-1}\nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\sharp\mathcal{P}_m \right) + \mathcal{M}_{-2}$$

où \mathcal{M}_{-2} est le symbole d'un opérateur de OPS⁻². Ainsi, comme

$$\mathcal{P}_m^{-1}\mathcal{L}_0^\sharp\mathcal{P}_m = \sigma(\Lambda_0),$$

on en déduit que

$$\sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) = \sigma_P(\mathcal{P}_m^{-1}\mathcal{L}_0^\sharp\mathcal{P}_m - \Lambda_0) = -i\mathcal{P}_m^{-1} \left(\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{L}_0^\sharp \right) \left(\nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{P}_m \right) - i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_m^{-1}\nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\sharp\mathcal{P}_m \right) \quad (2.15)$$

En injectant (2.15) ainsi que (2.14) dans (2.13), on achève la preuve de la proposition 2.3. ■

2.3.1 Le cas $\rho = \rho(z)$

Dans le cas simple où ρ ne varie pas latéralement, le système approché présenté à la proposition 2.3 est plus simple. En effet, si $\rho = \rho(z)$, chaque terme de \mathcal{L}_{-1}^\sharp est nul. Le symbole de $\mathbf{R}_{0,P}$ se simplifie donc en :

$$\sigma(\mathbf{R}_{0,P}) = -i\omega\sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) - \mathcal{P}_m^{-1}(\partial_z \mathcal{P}_m) \quad (2.16)$$

où $\sigma(\mathbf{R}_{-1})$ reste inchangé et est donné en (2.15). Les termes de \mathcal{L}_{-1}^\sharp sont *a fortiori* tous nuls dans le cas où ρ est constant et on obtient le même modèle approché que dans le cas où ρ ne dépend que de z . On peut toutefois s'attendre à ce que le terme $\mathcal{P}_m^{-1}\partial_z \mathcal{P}_m$ soit plus simple si ρ est constant. On peut noter que nous ne retrouvons pas le même modèle que celui considéré dans [30, 31, 61] car dans chacun de ces travaux, on néglige systématiquement l'opérateur \mathbf{R}_{-1} . En approchant dès le départ l'opérateur $Q_{-m}L_0^\sharp P_m$ par sa partie principale, nous obtenons :

$$\sigma(\mathbf{R}_{0,P}) \simeq -\mathcal{P}_m^{-1}(\partial_z \mathcal{P}_m) \quad (2.17)$$

et on retrouve bien le modèle considéré dans [30, 31, 61]. A présent, se pose la question du choix de la matrice \mathcal{P}_m qui va conditionner l'écriture du modèle. Nous nous intéressons à ce point dans le paragraphe suivant.

2.3.2 Choix de la matrice des vecteurs propres

Si les valeurs propres sont définies de façon unique, la construction de P_m *via* son symbole ne l'est pas. Un critère d'unicité peut néanmoins être obtenu en décidant de la régularité de l'inconnue auxiliaire. En effet, l'inconnue auxiliaire est liée à l'inconnue du problème initial par la relation $\mathbf{V} = Q_{-m}\mathbf{U}$. Supposons pour fixer les idées que $\mathbf{U} \in L^2(Q)$ où $Q = \Omega \times [0, T]$. Si P_m appartient à OPS^m avec $m \in \mathbb{Z}$, son inverse est dans OPS^{-m} . L'inconnue auxiliaire appartient donc à $H^{-m}(Q)$. Reste à choisir $m \in \mathbb{Z}$. Pour cela, on peut opter pour plusieurs choix. L'idée la plus naturelle consiste à chercher \mathbf{V} ayant la même régularité que \mathbf{U} . Dans ce cas, on construit P_m dans OPS^0 , c'est-à-dire, on choisit $m = 0$. On peut aussi choisir de régulariser \mathbf{U} en construisant P_m dans OPS^m avec $m \in \mathbb{Z}^+$. Alors, Q_{-m} est régularisant d'ordre $-m$. Cette démarche n'est pas souhaitable si on a dans l'idée d'utiliser une méthode d'éléments finis. En effet, elle sous-entend d'utiliser un espace discret pour l'approximation qui sera plus riche que si on résolvait le problème initial directement. On pénalise donc la méthode numérique en alourdissant les charges de calcul. Enfin, on peut préférer construire P_m dans OPS^m avec $m \in \mathbb{Z}^-$. Dans ce cas, l'inconnue auxiliaire \mathbf{V} est moins régulière que \mathbf{U} et peut être approchée à moindre coût que \mathbf{U} .

Mais la régularité de \mathbf{V} n'est pas vraiment au centre des débats ici car on va utiliser des transformées de Fourier qui induisent des charges de calcul qui sont les mêmes, quelle que soit la régularité de \mathbf{V} . Cependant, le choix de P_m est crucial pour la construction du modèle puisqu'il détermine l'expression des termes de couplage ainsi qu'une partie des termes de transport. Pour illustrer ce point, supposons ρ constant,

choisissons $m = 0$ et considérons le modèle le plus simple. On néglige donc l'opérateur \mathbf{R}_{-1} et les termes de couplage sont donnés par l'opérateur $P_0^{-1}(\partial_z P_0) \in \text{OPS}^0$. Choisissons la matrice \mathcal{P}_0 de la forme :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} \rho & -1/\gamma_0 \\ \gamma_0 & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Son inverse est donné par la matrice

$$\mathcal{P}_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/\rho & 1/\gamma_0 \\ -\gamma_0 & \rho \end{pmatrix}$$

et on vérifie que :

$$\mathcal{P}_0^{-1} \partial_z \mathcal{P}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_z \gamma_0 / \gamma_0 & \partial_z \gamma_0 / (\rho (\gamma_0)^2) \\ \rho (\partial_z \gamma_0) & -\partial_z \gamma_0 / \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Considérons maintenant l'opérateur $P_0 \in \text{OPS}^0$ construit par J. Le Rousseau [61]. Son symbole est noté $\mathcal{P}_{0,LR}$ avec :

$$\mathcal{P}_{0,LR} = \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ \gamma_0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

et on a :

$$\mathcal{P}_{0,LR}^{-1} = \frac{1}{2\rho\gamma_0} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \rho \\ \gamma_0 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$(\mathcal{P}_{0,LR}^{-1}(\partial_z \mathcal{P}_{0,LR})) = \frac{1}{2\gamma_0} \begin{pmatrix} \partial_z \gamma_0 & -\partial_z \gamma_0 \\ -\partial_z \gamma_0 & \partial_z \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Il est clair que (2.19) et (2.21) diffèrent. On voit donc sur cet exemple simple que le modèle n'est pas unique : les termes de couplage sont très sensibles au choix de la matrice de vecteurs propres.

On pourrait penser que ce problème de non unicité est causé par l'absence de l'opérateur \mathbf{R}_{-1} et que sa prise en compte suffit à corriger les termes de couplage pour les exprimer de façon unique. Pour un opérateur P_m donné, on obtiendrait ainsi un modèle unique. Mais si on revient à l'expression de l'opérateur \mathbf{R}_{-1} , on observe que le symbole de cet opérateur s'exprime en fonction de dérivées par rapport à la variable transverse \mathbf{x}' et la variable duale \mathbf{k}' . Pour s'en convaincre, revenons au cas particulier $m = 0$. Si on fait le choix (2.18), on obtient :

$$\sigma(i\omega \mathbf{R}_{-1}) = \frac{1}{2\gamma_0^2} \begin{pmatrix} 1/\gamma_0 & 1/(2\rho\gamma_0^2) \\ \rho/2 & 1/\gamma_0 \end{pmatrix} \frac{1}{\omega} \mathbf{k}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Si on choisit (2.20), il vient :

$$\sigma(i\omega \mathbf{R}_{-1}) = \frac{1}{2\gamma_0^3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\omega} \mathbf{k}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Le symbole de l'opérateur \mathbf{R}_{-1} ne peut donc corriger les expressions (2.19) et (2.21) qui font intervenir des dérivés par rapport à z .

La façon dont on doit choisir P_m n'est donc pas claire. Pour fixer les idées, continuons à considérer le cas $m = 0$. Si on néglige l'opérateur \mathbf{R}_{-1} , le choix de J. Le Rousseau semble le plus judicieux. En effet, l'expression (2.21) montre que les opérateurs \mathbf{R}_0^\dagger et \mathbf{R}_0^\flat ont des symboles qui s'exprime très simplement en fonction de la valeur propre γ_0 :

$$\sigma(\mathbf{R}_0^\flat) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_z \gamma_0}{\gamma_0} I_2 \text{ et } \sigma(\mathbf{R}_0^\dagger) = \frac{1}{2} \frac{\partial_z \gamma_0}{\gamma_0} J_2$$

où I_2 désigne la matrice identité d'ordre deux et J_2 est la matrice à termes positifs telle que $J_2^2 = I_2$. Néanmoins, cet argument est caduque si on décide de conserver l'opérateur \mathbf{R}_{-1} .

Remarque 5. Dans [27] (voir §4), on obtient une décomposition de l'onde diffractée au voisinage d'une pointe qui s'exprime de la même façon que le modèle de la proposition 2.1 avec le même type d'opérateur de couplage lorsque nous choisissons $\mathcal{P}_{0,LR}$.

Une autre façon de choisir P_m peut s'appuyer sur la remarque suivante. Dans le modèle GSP, le terme source est de la forme $S = Q_{-m}F$. La matrice \mathcal{P}_m^{-1} peut éventuellement s'exprimer à partir de puissances négatives de la valeur propre γ_0 , ce qui peut générer des instabilités numériques aux voisinages des fréquences \mathbf{k}' annulant γ_0 . On peut donc choisir de construire P_m de telle sorte que le symbole de Q_{-m} ne comporte que des puissances positives de la valeur propre. Dans le cas particulier où $m = 0$, on peut prendre pour symbole de P_0 , la matrice

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = \begin{pmatrix} 1/\gamma_0 & -1/\gamma_0 \\ 1/\rho & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{P}}_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \rho \\ -\gamma_0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les termes de couplage sont de la forme :

$$\tilde{\mathcal{P}}_0^{-1} \partial_z \tilde{\mathcal{P}}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\partial_z \gamma_0 / \gamma_0 & \partial_z \gamma_0 / \gamma_0 \\ \partial_z \gamma_0 / \gamma_0 & -\partial_z \gamma_0 / \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

et

$$\sigma(i\omega \mathbf{R}_{-1}) = \frac{1}{2\gamma_0^3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\omega} \mathbf{k}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Si on néglige l'opérateur \mathbf{R}_{-1} , le modèle obtenu est aussi simple à écrire que celui de J. Le Rousseau. Il serait donc intéressant de les comparer numériquement.

En guise de conclusion à cette partie, on peut dire que la proposition 2.1 et son corollaire énonce l'existence d'une infinité de modèles GSP. Leur expression dépend du choix de la matrice de vecteurs propres. Cette matrice peut être choisie de diverses

façons, la meilleure n'étant pas clairement dégagée. Notons que cette question a été évoquée dans [54]. Dans cet article, on utilise une méthode de résolution du type matriciel pour l'équation des ondes élastiques, mais sans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels car le milieu de propagation est simple (stratifié). L'auteur suggère de choisir la matrice de vecteurs propres \mathcal{P} telle que $\mathcal{P}\mathcal{P}^* = \mathcal{I}$ où \mathcal{P}^* désigne la matrice adjointe de \mathcal{P} . En ce qui nous concerne, nous opterons pour des matrices comme $\mathcal{P}_{0,LR}$ ou $\tilde{\mathcal{P}}_0$ car elles minimisent les calculs à réaliser puisque les symboles de \mathbf{R}_0^h et \mathbf{R}_0^b s'obtiennent à partir du même calcul.

2.4 Modèle GSP et approximation de Born

Dans cette partie, nous supposons, pour simplifier, que la masse volumique est constante.

En prospection sismique, lorsque le milieu est caractérisé par un profil de vitesse c comportant des singularités, on utilise souvent un modèle approché de l'équation des ondes. On introduit un milieu de référence dont le profil de vitesse c_r est régulier et réalise une approximation du profil initial, ce qui signifie que $\delta c = c - c_r$ est petit devant 1. Le modèle de Born se dérive de la façon suivante. Si p désigne le champ de pression solution de l'équation d'onde :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p - \Delta p = S \text{ dans } \Omega \times]0, T[, p(0, \mathbf{x}) = \partial_t p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.24)$$

où S désigne toujours la source, on décompose p en $p = p_r + \delta p$ et le couple $(p_r, \delta p)$ est construit comme solution d'un système d'équations d'onde couplées et posées dans le milieu de référence. Ce système est appelé modèle d'approximation de Born et pour sa résolution, on s'affranchit du traitement des singularités de c puisqu'il est posé dans un milieu caractérisé par une vitesse régulière. On se donne donc p_r solution de :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_r^2} \partial_t^2 p_r - \Delta p_r = S \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ p_r(0, \mathbf{x}) = \partial_t p_r(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.25)$$

En effectuant la différence entre les équations (2.24) et (2.25), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p - \frac{1}{c_r^2} \partial_t^2 p_r - \Delta(\delta p) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \delta p(0, \mathbf{x}) = \partial_t(\delta p)(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.26)$$

Le système (2.26) va être modifié en procédant à une approximation par rapport au petit paramètre δc . On fait apparaître ce petit paramètre en se ramenant à un problème posé dans le milieu de référence. Ainsi, on transforme (2.26) en :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_r^2} \partial_t^2(\delta p) - \Delta(\delta p) = \left(\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2} \right) \partial_t^2 p \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \delta p(0, \mathbf{x}) = \partial_t(\delta p)(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.27)$$

et on approche le terme $\left(\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2} \right) \partial_t^2 p$. Pour cela, comme on suppose que δc est petit, on néglige le terme $\left(\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2} \right) \partial_t^2(\delta p)$ dans $\left(\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2} \right) \partial_t^2(p_r + \delta p) = \left(\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2} \right) \partial_t^2 p$. De plus, par approximaton de type Taylor, on obtient :

$$\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2} = \frac{2\delta c}{c_r^3} + o(\delta c^2).$$

On approche alors le second membre de (2.27) par $\frac{2\delta c}{c_r^3} \partial_t^2 p_r$ et le modèle approché de Born s'écrit : trouver $(p_r, \delta p)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{c_r^2} \partial_t^2 p_r - \Delta p_r = S \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{1}{c_r^2} \partial_t^2 (\delta p) - \Delta (\delta p) = \frac{2\delta c}{c_r^3} \partial_t^2 p_r, \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ p_r(0, \mathbf{x}) = \partial_t(p_r)(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \delta p(0, \mathbf{x}) = \partial_t(\delta p)(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.28)$$

Le modèle (2.28) a été utilisé dans [33] où on obtient, après couplage avec des équations paraxiales, des résultats corrects dans le cas de profils de vitesse assez réguliers. Nous nous proposons ici de construire un modèle GSP intégrant une approximation de Born, dans le but de le comparer, du point de vue numérique, au modèle GSP standard. Afin de construire un code complet permettant de résoudre à la fois le modèle GSP et le modèle GSP+BORN, nous conserverons l'architecture du modèle initial en suivant la même démarche qu'au paragraphe 2.2.

On rappelle que dans le cas où ρ est constant, le système initial est de la forme :

$$\begin{cases} \nabla p + \rho \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{1}{\rho c^2} \partial_t p + \operatorname{div} \mathbf{u} = q \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.29)$$

On utilise les mêmes notations que précédemment. On définit d'abord (p_r, \mathbf{u}_r) comme une solution de :

$$\begin{cases} \nabla p_r + \rho \partial_t \mathbf{u}_r = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{1}{\rho c_r^2} \partial_t p_r + \operatorname{div} \mathbf{u}_r = q \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ p_r(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \mathbf{u}_r(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.30)$$

On note $\delta \mathbf{u}$ et δp les écarts de vitesse et pression mesurés par les deux modèles (2.29) et (2.30), soit $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_r$ et $\delta p = p - p_r$. En faisant la différence entre le modèle initial et le modèle (2.30), on obtient que le couple $(\delta \mathbf{u}, \delta p)$ vérifie :

$$\begin{cases} \nabla(\delta p) + \rho \partial_t(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{1}{\rho c^2} \partial_t p - \frac{1}{\rho c_r^2} \partial_t p_r + \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \delta p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \delta \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.31)$$

On transforme enfin (2.31) en se ramenant à des équations posées dans le milieu de référence puis en approchant le résidu correspondant $\left(\frac{1}{c_r^2} - \frac{1}{c^2}\right) \partial_t p$ de la même façon que pour l'équation des ondes, à savoir par $\frac{2\delta c}{c_r^3} \partial_t p_r$. Le modèle GSP+BORN s'écrit donc comme deux systèmes GSP couplés, le premier étant donné par (2.30) et le second s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla(\delta p) + \rho \partial_t(\delta \mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{1}{\rho c^2} \partial_t \delta p + \operatorname{div}(\delta \mathbf{u}) = \frac{2\delta c}{\rho c_r^3} \partial_t p_r \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \delta p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } \delta \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.32)$$

Pour résoudre les deux systèmes GSP (2.30,2.32) couplés, on peut utiliser le même algorithme de résolution que pour le système GSP standard. Cet algorithme se développe de la même façon qu'au paragraphe 2.2. Après transformée de Fourier-Laplace en temps, on obtient pour les systèmes (2.30) et (2.32) :

$$\begin{cases} \nabla \widehat{p}_r + i\omega \rho (\widehat{\mathbf{u}}_r) = \mathbf{0} \\ i\omega \frac{1}{\rho c_r^2} (\widehat{p}_r) + \operatorname{div}(\widehat{\mathbf{u}}_r) = \widehat{q} \end{cases} \quad (2.33)$$

et

$$\begin{cases} \nabla \widehat{\delta p} + i\omega \rho \widehat{\delta \mathbf{u}} = \mathbf{0} \\ i\omega \frac{1}{\rho c_r^2} (\widehat{\delta p}) + \operatorname{div} \widehat{\delta \mathbf{u}} = i\omega \left(\frac{2\delta c}{\rho c_r^3} \right) \widehat{p}_r. \end{cases} \quad (2.34)$$

On en déduit le couple de systèmes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\perp(\widehat{\mathbf{u}}'_r) = -\frac{1}{i\omega \rho} (\operatorname{div}_\perp(\nabla \widehat{p}_r)) \\ \partial_z \widehat{p}_r + i\omega \rho \widehat{u}_{r_z} = 0 \\ \frac{i\omega}{\rho c_r^2} (\widehat{p}_r) + \partial_z \widehat{u}_{r_z} + \operatorname{div}_\perp \widehat{\mathbf{u}}'_r = \widehat{q}, \end{cases} \quad (2.35)$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{div}_\perp(\widehat{\delta \mathbf{u}}') = -\frac{1}{i\omega \rho} \operatorname{div}_\perp(\nabla \widehat{\delta p}) \\ \partial_z \widehat{\delta p} + i\omega \rho \widehat{\delta u}_z = 0 \\ \frac{i\omega}{\rho c_r^2} (\widehat{\delta p}) + \partial_z (\widehat{\delta u})_z + \operatorname{div}_\perp \widehat{\delta \mathbf{u}}' = i\omega \left(\frac{2\delta c}{\rho c_r^3} \right) \widehat{p}_r. \end{cases} \quad (2.36)$$

On élimine $\widehat{\mathbf{u}}'_r$ et $\widehat{\delta \mathbf{u}}'$ dans les deux dernières équations de (2.35) et (2.36), ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \partial_z \widehat{p}_r + i\omega \rho \widehat{u}_{r_z} = 0 \\ \left(\frac{i\omega}{\rho c_r^2} - \frac{1}{i\omega \rho} \operatorname{div}_\perp \nabla \right) (\widehat{p}_r) + \partial_z \widehat{u}_{r_z} = \widehat{q}, \end{cases} \quad (2.37)$$

et

$$\begin{cases} \partial_z \widehat{\delta p} + i\omega \rho \widehat{\delta u}_z = 0 \\ \left(\frac{i\omega}{\rho c_r^2} - \frac{1}{i\omega \rho} \operatorname{div}_\perp \nabla \right) (\widehat{\delta p}) + \partial_z \widehat{\delta u}_z = \left(i\omega \frac{2\delta c}{\rho c_r^3} \right) \widehat{p}_r. \end{cases} \quad (2.38)$$

On récrit les systèmes sous forme matricielle, et on obtient :

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_z + i\omega L^\sharp) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ (\mathbf{D}_z + i\omega L^\sharp) \delta \mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{F}} \end{cases} \quad (2.39)$$

où

$$\mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix}, \quad L^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \left(\frac{1}{\rho c_r^2} - \frac{1}{\omega^2 \rho} \right) \operatorname{div}_\perp \nabla_\perp & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = {}^t (\widehat{p}_r, (\widehat{v}_r)_z),$$

$$\delta \mathbf{U} = {}^t (\widehat{\delta p}, \widehat{\delta v}_z), \quad \mathbf{F} = {}^t (0, \widehat{q})$$

et

$$\widetilde{\mathbf{F}} = {}^t \left(0, \left(i\omega \frac{2\delta c}{\rho c_r^3} \right) \widehat{p}_r \right).$$

On peut remarquer que $\tilde{\mathbf{F}}$ dépend de \mathbf{U} , puisque

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\mathbf{U}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\omega \frac{2\delta c}{\rho c_p^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathbf{U} = P_0\mathbf{V}$ et $\delta\mathbf{U} = P_0\delta\mathbf{V}$, où P_0 est l'opérateur déterminé au paragraphe précédent. En procédant aux mêmes développements qu'au paragraphe 2.3, on obtient comme modèles GSP couplés, approchés par la méthode de Born :

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \epsilon\mathbf{R}_0^b)\mathbf{V} \simeq ((1 - \epsilon\mathbf{R}_0^b + \mathbf{R}_0^h)\mathbf{V} + Q_0\mathbf{F} \\ (\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \epsilon\mathbf{R}_0^b)\delta\mathbf{V} \simeq ((1 - \epsilon\mathbf{R}_0^b + \mathbf{R}_0^h)\delta\mathbf{V} + Q_0AP_0\mathbf{V} \end{cases} \quad (2.40)$$

où $\epsilon = 0$ ou 1 .

2.5 Comparaison avec le modèle one-way de Zhang *et al*

Dans le cas où les opérateurs d'onde one-way sont obtenus *via* la factorisation la plus simple de l'équation des ondes, ils génèrent des erreurs sur l'amplitude à l'exception du cas où le milieu de propagation est homogène. Pour rester dans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels que nous avons utilisé jusqu'ici, la factorisation la plus simple consiste à remplacer l'opérateur des ondes dans OPS² par le produit de deux opérateurs de OPS¹ dont les symboles sont exactement dans S¹. L'un de ces opérateurs décrit les ondes descendantes et l'autre les ondes montantes. Il suffit alors de développer le produit de ces opérateurs pour exprimer la différence entre l'équation des ondes et le résultat de la factorisation. Cette erreur s'exprime à partir d'un opérateur de OPS¹ qui, si on considère une solution du type WKBJ, n'affecte que l'amplitude. On comprend ainsi qu'inévitablement le modèle one-way ne reproduira pas correctement l'amplitude de la solution.

Le but de cette partie est d'exposer les résultats de [69] afin de les comparer au modèle GSP que nous considérons.

2.5.1 Le modèle one-way de Zhang *et al*

Les équations one-way s'appuient sur une séparation des solutions de l'équation des ondes en une partie descendante (dans le sens des z croissants) et une partie montante. Les premières équations one-way ont été proposées par Claerbout [22, 24] pour la migration. Elles ont été construites pour obtenir des temps de trajet précis mais les amplitudes sont erronées et ne sont même pas du niveau de celles données par la méthode WKBJ ou la théorie des rayons.

L'objectif de Zhang et ses collaborateurs [69] est de construire des équations one-way

modifiées qui fournissent une solution WKBJ correcte, *i.e.* une amplitude en accord avec la théorie des rayons et un temps de trajet correct.

Considérons l'équation des ondes du second ordre homogène :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p - \Delta p = 0 \quad (2.41)$$

où p désigne toujours le champ de pression. Pour résoudre (2.41), on peut chercher p sous la forme

$$p(t, \mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) e^{i\omega(t - \varphi(\mathbf{x}))}. \quad (2.42)$$

Les solutions de la forme (2.42) sont appelées solutions WKBJ. Le vecteur $\nabla \varphi$ pointe dans la direction de propagation des fronts d'onde. Si le signe de $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ est positif, p correspond à une onde descendante, se propageant dans le sens des z croissants. Si $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ est négatif, p est associé à une onde montante.

La méthode la plus standard (car elle s'appuie sur des outils classiques) pour factoriser (2.41) s'applique lorsque c ne dépend que de z . Dans ce cas on fait une transformée de Fourier en t et \mathbf{x}' et si \hat{p} désigne la transformée de p , \hat{p} est solution de :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} + k_z^2 \hat{p} = 0 \quad (2.43)$$

avec $k_z = \text{signe}(\omega) \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}'|^2}$. On peut remarquer que $k_z = \omega \gamma_0$ dans nos notations. Dans le cas le plus simple où c est constante, (2.43) se réécrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \mp ik_z \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right) \hat{p} = 0 \quad (2.44)$$

Dans le cas général, on peut utiliser le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels et le théorème de factorisation de Nirenberg [56]. On montre ainsi qu'il existe deux opérateurs Λ^\pm de OPS¹ tels que :

$$\frac{-\omega^2}{c^2} - \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda^- \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda^+ \right) \quad (2.45)$$

avec $\sigma_P(\Lambda^-) = -\sigma_P(\Lambda^+) = k_z$. Nous renvoyons à [4] pour la définition explicite de Λ^- et Λ^+ . Nous remarquons que ce résultat n'a pas été utilisé dans [69] bien qu'il soit un des plus complets sur le sujet. Cependant, on peut citer la note de Kiyaschenko *et al.* [55] où ce type d'approche est amorcée, sans aucune justification rigoureuse. Zhang et ses collaborateurs ont plutôt procédé de la façon suivante. Etant donnée une solution WKBJ de la forme (2.42), écrivons qu'elle est solution de (2.43). On obtient alors :

$$-\omega^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{k_z}{\omega} \right)^2 \right] A - i\omega \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} A \right] + O(1) = 0$$

où $O(1)$ correspond à l'ordre de la puissance en ω . En identifiant les termes selon l'ordre de la puissance de ω , on retrouve l'équation eikonale et les équations de

transport familières à la théorie des rayons, à l'exception du fait que l'on travaille sur les variables (\mathbf{k}', ω) . On obtient ainsi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \pm \frac{k_z}{\omega}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\omega^2}{2c^3 k_z^2} \frac{\partial c}{\partial z} A = 0 \quad (2.46)$$

Maintenant, si on considère les solutions WKBJ de

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm ik_z \right) A_{\pm} e^{i\omega(t \mp \varphi)} = 0,$$

on obtient, si φ vérifie l'équation eikonale,

$$\frac{\partial A_{\pm}}{\partial z} = 0.$$

Cette équation de transport n'est donc pas en accord avec la seconde équation de (2.46).

Afin de corriger ce défaut, Zhang *et al.* proposent de corriger les équations one-way en tenant compte de (2.46). Ils proposent de forcer l'équation de transport de (2.46) dans le modèle one-way ; les nouvelles équations one-way sont alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \mp ik_z - \frac{\omega^2}{2c^3 k_z^2} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \hat{p} = 0$$

et on vérifie que si \hat{p} est de la forme WKBJ, on retrouve bien (2.46).

En fait en utilisant les résultats de [4], on obtient que

$$\sigma_P(\Lambda^{\pm}) = \pm ik_z - \frac{\omega^2}{2c^3 k_z^2} \frac{\partial c}{\partial z} + \sigma_{-1}$$

où σ_{-1} est un symbole de S^{-1} . On peut donc démontrer dans un cadre plus général que celui des solutions WKBJ que la correction apportée dans [69] correspond à une approximation de l'opérateur des ondes dans OPS⁰. Les résultats de [4] permettent même d'aller plus loin dans la factorisation. On pourrait construire des équations one-way exactes à un ordre arbitraire sans difficulté.

Remarque 6. On obtient (2.46) en identifiant les termes en ω^2 et ω . On peut s'étonner de faire intervenir $\left(\frac{k_z}{\omega}\right)^2$ mais ce terme est bien homogène d'ordre 0 par rapport à ω . Travailler dans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels et raisonner dans la classe des symboles S^2 puis S^1 donne certainement un cadre plus rigoureux, dans lequel on pourrait utiliser le ω -calcul pour développer les équations, comme le fait O. Lafitte dans [58] pour les conditions d'impédance.

Le modèle one-way s'écrit alors de la façon suivante. Supposons que le champ réfléchi à partir d'une source unique est observé en $z = 0$. Alors la source et les champs mesurés sont solutions des équations

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + \Gamma - C \right) p_d(\mathbf{x}, \omega) = 0 \\ p_d(\mathbf{x}_s, \omega) = -\frac{1}{2} \Gamma^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \end{cases}$$

où Γ est l'opérateur dont le symbole est ik_z et p_d désigne la pression associée au champ descendant. Le champ montant p_u est obtenu en résolvant

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \Gamma - C \right) p_u(\mathbf{x}, \omega) = 0 \\ p_u(\mathbf{x}_s, \omega) = Q(\mathbf{x}', \omega). \end{cases}$$

L'opérateur C est l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est $\frac{\omega^2}{2c^3k_z^2} \frac{\partial c}{\partial z}$.

Dans [69], les auteurs ont réalisé des expériences numériques pour la migration. Ils ont comparé leurs résultats à ceux obtenus par une méthode de Kirschhoff [45]. Les nouvelles équations one-way donnent des résultats de qualité comparable tant du point de vue cinématique que du point de vue dynamique. Néanmoins, les tests ont été faits dans le cas où c ne dépend que de z et est assez lisse.

2.5.2 Comparaison avec le modèle GSP

Le modèle GSP s'appuie sur la résolution d'un système du premier ordre à deux inconnues. On le réécrit, dans le cas homogène ($\mathbf{F} = 0$) sous la forme

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\omega Op(\gamma_0) - T_0 \right) V_+ = R_0 V_- \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\omega Op(\gamma_0) - T_0 \right) V_- = R_0 V_+, \end{cases}$$

où V_- désigne la partie montante de l'inconnue \mathbf{V} et V_+ sa partie descendante. On a noté T_0 l'opérateur d'ordre 0 dont le symbole $\sigma(T_0) \in S^0$ est tel que $\sigma(\mathbf{R}_0^b) = \sigma(T_0)I_2$, I_2 représentant la matrice identité. L'opérateur R_0 est aussi dans OPS^0 . Son symbole $\sigma(R_0)$ est donné par $\sigma(\mathbf{R}_0^b) = \sigma(R_0)J_2$. Si on néglige les termes de couplage, on retrouve des équations one-way du type de [69]. De plus, en choisissant P_0 tel que $\sigma(P_0) = \mathcal{P}_{0,LR}$, on a

$$\sigma(T_0) = -\frac{1}{2}\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0.$$

Or,

$$\begin{aligned} \partial_z\gamma_0 &= \partial_z \left(\frac{1}{c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\partial_z \left(\frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega^2} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

et donc

$$\partial_z\gamma_0 = -\frac{\partial_z c}{c^3} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega^2} \right)^{-1/2}.$$

On obtient donc :

$$\sigma(T_0) = \frac{1}{2}\gamma_0^{-1} \frac{\partial_z c}{c^3} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega^2} \right)^{-1/2}.$$

De plus on a déjà remarqué que $k_z = \omega\gamma_0$. Ainsi, on obtient, en utilisant les notations de [69],

$$\sigma(T_0) = \frac{\omega^2}{2c^3k_z^2} \frac{\partial c}{\partial z}.$$

On retrouve donc le terme correcteur introduit par Zhang et ses collaborateurs.

On peut noter que l'opérateur T_0 intervient de façon naturelle dans la construction du modèle. Il suffit de projeter la solution sur les sous-espaces propres associés à la partie principale de l'opérateur des ondes pour le faire apparaître. Il s'agit de l'opération la plus simple à effectuer puisqu'on se contente d'une diagonalisation dans OPS¹. Faire apparaître ce même terme sur l'équation d'ordre deux est plus technique puisqu'il faut factoriser l'équation des ondes jusqu'à l'ordre zéro, en utilisant le théorème de Nirenberg. Enfin, en considérant l'équation d'ordre deux, on ne peut faire apparaître de façon explicite les termes de couplage entre les ondes descendantes et les ondes montantes, ce qui peut justifier de privilégier l'approche matricielle.

On finit cette section par une remarque qui mériterait peut-être d'être approfondie et qui est toujours motivée par le souhait d'établir un lien entre le modèle de Zhang *et al.* et le modèle GSP. Les idées qui suivent sont le plus souvent développées dans un cadre formel, nous ne prétendons pas les exprimer dans un contexte rigoureux.

En fait, une façon de lier les deux modèles peut consister à revenir au principe de la diagonalisation de l'opérateur L^\sharp . Au sens des opérateurs, on associe à L^\sharp l'opérateur P^\sharp que nous appellerons opérateur caractéristique et qui est défini par :

$$P^\sharp(X) = X^2 - \kappa\rho - \frac{\rho}{\omega^2} \operatorname{div}_T \left(\frac{1}{\rho} \nabla_T \right). \quad (2.47)$$

Si on considère la famille des distributions X telles que $P^\sharp(X) = 0$, on peut définir, au moins formellement, l'ensemble des distributions propres à gauche de L^\sharp , c'est-à-dire les distributions \mathbf{V} non nulles pour lesquelles

$$L^\sharp \mathbf{V} = X \mathbf{V}.$$

L'expression (2.47) indique que deux distributions sont dans le noyau de P^\sharp et qu'elles sont de la forme :

$$X^\pm = \pm \left(\kappa\rho + \frac{\rho}{\omega^2} \operatorname{div}_T \left(\frac{1}{\rho} \nabla_T \right) \right)^{1/2}.$$

L'opérateur P^\sharp peut donc se factoriser sous la forme

$$\begin{aligned} P^\sharp(X) &= (X - X^+)(X - X^-) \\ &= (X - X^-)(X - X^+) \pmod{C^\infty} \end{aligned} \quad (2.48)$$

A présent, en choisissant $X = \frac{\partial}{\partial z}$, l'opérateur $P^\sharp \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$ coïncide exactement avec l'opérateur des ondes. On voit donc que la factorisation de l'équation des ondes passe par le calcul des valeurs propres de L^\sharp , ce qui explique qu'on retrouve les mêmes expressions dans les deux cas.

2.6 Le Paraxial et le modèle GSP

Dans l'esprit du modèle GSP, les approximations paraxiales ou paraboliques de l'équation des ondes ont souvent été utilisées pour décrire la propagation des ondes dans une direction privilégiée. En sismologie, on peut citer les travaux précurseurs de Claerbout [20] complétés ensuite dans [22, 21, 23, 49, 60, 63]. Ces approximations peuvent aussi être utilisées comme conditions aux limites absorbantes pour la résolution de l'équation des ondes complète. Dans deux papiers consécutifs [6, 7], Bamberger et ses collaborateurs ont développé des approximations paraxiales pour l'équation des ondes en milieu hétérogène. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'en approchant le propagateur à haute fréquence, on retrouve les équations paraxiales du même type que celles utilisées dans [33].

2.6.1 Les équations paraxiales

Ces équations sont dérivées à partir de l'équation des ondes sans second membre :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p - \Delta p = 0.$$

En supposant que p est une onde plane de la forme

$$p(\mathbf{x}', z, t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - k_z z)},$$

on obtient que p est solution de l'équation si et seulement si ω , \mathbf{k}' et k_z sont liés par la relation de dispersion :

$$|\mathbf{k}'|^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

On obtient ainsi que k_z est de la forme :

$$k_z^\pm = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{c|\mathbf{k}'|}{\omega} \right)^2} \text{ soit encore } k_z^\pm = \pm \omega \gamma_0$$

et toute solution onde-plane s'écrit donc :

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}', z, t) = p^+(\mathbf{x}', z, t) + p^-(\mathbf{x}', z, t) \\ p^\pm(\mathbf{x}', z, t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - k_z^\pm z)} \end{cases}$$

Dans le cas où la vitesse est homogène, on observe que :

$$\partial_z p^+ + i k_z^+ p^+ = 0 \quad , \quad \partial_z p^- + i k_z^- p^- = 0. \quad (2.49)$$

Toute solution onde-plane de l'équation des ondes est donc la somme d'une solution descendante (se propageant dans le sens des $z > 0$) et d'une solution montante (se propageant dans le sens des $z < 0$), chacune étant caractérisée par (2.49). La difficulté de la représentation (2.49) réside dans le fait que l'expression de k_z n'est pas polynomiale. On ne peut donc généraliser (2.49) à toute solution de l'équation des ondes car k_z est le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel. On n'obtient

donc pas directement une équation aux dérivées partielles, ce qui complique très considérablement la résolution de (2.49). C'est pourquoi on approche k_z soit par un polynôme, soit par une fonction rationnelle, ce qui conduit à une équation d'onde paraxiale. Cette équation est d'ordre un par rapport à la variable z , tout comme le modèle GSP.

L'approximation la plus simple consiste à approcher k_z par un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$k_z^\pm \simeq \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{c|\mathbf{k}'|}{\omega} \right)^2 \right)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \partial_z p^+ + \left(i\frac{\omega}{c} - \frac{ic}{2\omega} |\mathbf{k}'|^2 \right) p^+ = 0 \\ \partial_z p^- - \left(i\frac{\omega}{c} - \frac{ic}{2\omega} |\mathbf{k}'|^2 \right) p^- = 0 \end{cases}$$

On en déduit deux équations aux dérivées partielles. La première est associée aux ondes descendantes, la deuxième aux ondes montantes. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p^+ - \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}'} p^+ + \frac{1}{c} \partial_z \partial_t p^+ = 0 \\ -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p^- - \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}'} p^- + \frac{1}{c} \partial_z \partial_t p^- = 0 \end{cases}$$

L'approximation de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\sqrt{1-u}$ n'est reconnue correcte que, si on pose $u = \sin^2 \theta$, pour $\theta < 15^\circ$. On pourrait alors penser qu'il suffit d'augmenter l'ordre d'approximation pour élargir le domaine de validité de l'équation paraxiale. Hélas, augmenter l'ordre d'approximation conduit à des problèmes mal posés. On peut toutefois améliorer les résultats en approchant $\sqrt{1-u}$ par des fonctions rationnelles, en utilisant des approximants de Padé [6, 7]. En considérant une approximation de Padé d'ordre 2, $\sqrt{1-u}$ est approchée de façon correcte pour $\theta < 45^\circ$ avec $u = \sin^2 \theta$.

En milieu hétérogène, on peut dériver une équation paraxiale d'ordre 1, de la forme :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 p + \frac{1}{\sqrt{c}} \partial_z \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \partial_t p \right) - \frac{1}{2\sqrt{c}} \partial_x \left(c \partial_x \left(\frac{p}{\sqrt{c}} \right) \right) = 0 \quad (2.50)$$

qui peut se récrire sous la forme d'un système, après introduction d'une variable auxiliaire :

$$\begin{cases} \partial_z \left(\frac{p}{\sqrt{c}} \right) + \frac{1}{c^{3/2}} \partial_t p - \frac{1}{2} \partial_t \varphi = 0 \\ \frac{1}{c} \partial_t^2 \varphi - \partial_x \left(c \partial_x \left(\frac{p}{\sqrt{c}} \right) \right) = 0 \end{cases}$$

On se limite au cas d'un milieu hétérogène plan ce qui explique que seules les variables x et z sont considérées.

2.6.2 Approximation haute-fréquence du propagateur dans le cas plan

En reprenant les notations et hypothèses du paragraphe 2.5, le propagateur G_\pm^ϵ est défini comme l'inverse de l'opérateur $\partial_z + i\omega Op(\gamma_0) - \epsilon T_0$, où on rappelle que :

$$\gamma_0(x, k_x, z, \omega) = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2}}$$

On suppose que ω est grand. On peut récrire le symbole γ_0 sous la forme :

$$\gamma_0(x, k_x, z, \omega) = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \frac{(ck_x)^2}{\omega^2}}$$

et appliquer un développement de Taylor. On obtient ainsi

$$\gamma_0(x, k_x, z, \omega) \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(ck_x)^2}{\omega^2}\right) = \tilde{\gamma}_0(x, k_x, z, \omega)$$

L'opérateur T_0 a pour symbole principal

$$\sigma_P(T_0) = -\frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0.$$

Comme par définition de γ_0 ,

$$\partial_z \gamma_0 = -\frac{\partial_z c}{c} \left(\gamma_0 + \frac{k_x^2}{\omega^2 \gamma_0} \right),$$

on a donc

$$\sigma_P(T_0) = \frac{\partial_z c}{2c} \left(1 + \frac{k_x^2}{\omega^2 \gamma_0^2} \right).$$

On effectue alors un développement de Taylor du même ordre que pour γ_0 et on note \tilde{t}_0 le symbole approché. On obtient :

$$\tilde{t}_0(x, k_x, z, \omega) = \frac{\partial_z c}{2c} \left(1 + \frac{(ck_x)^2}{\omega^2} \right).$$

On note \tilde{G}_+^ϵ le propagateur haute fréquence dont l'inverse est l'opérateur

$$(\tilde{G}_+^\epsilon)^{-1} = \partial_z + i\omega Op(\tilde{\gamma}_0) - \epsilon Op(\tilde{t}_0).$$

Lorsque $\epsilon = 0$, on vérifie que l'opérateur approché est aussi donné par la relation :

$$c \partial_t (\tilde{G}_+^0)^{-1} = \frac{1}{c} \partial_t \partial_z + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{1}{2} \partial_x^2 \quad (2.51)$$

On retrouve donc la plus simple des équations paraxiales associée à un milieu homogène. La relation (2.51) s'obtient en composant l'opérateur $\partial_z + i\omega Op(\tilde{\gamma}_0)$ par ∂_t . Au niveau symbolique, on obtient ainsi une équation polynomiale qui se traduit ensuite par l'opérateur différentiel définissant le membre de droite de (2.51).

Si $\epsilon = 1$, on ne garde dans \tilde{t}_0 que les puissances de ω supérieures ou égale à -1 afin d'obtenir un développement du même ordre que celui de $i\omega \tilde{\gamma}_0$. Il vient ainsi :

$$c \partial_t (\tilde{G}_+^1)^{-1} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{1}{2} \partial_x^2 + \frac{1}{2c} \partial_z \partial_t + \frac{1}{2} \partial_z \left(\frac{1}{c} \partial_t \right).$$

On ne retrouve pas l'équation paraxiale (2.50) considérée dans [33] pour un milieu hétérogène. On ne fait pas intervenir les variations latérales de vitesse ce qui s'explique par le fait que l'on ne considère que le symbole principal de T_0 .

2.7 Un nouveau modèle GSP

Dans ce paragraphe, nous montrons comment on peut obtenir d'autres modèles GSP en développant l'équation de transport. Du point de vue explicite, nous nous limitons au cas d'un modèle d'ordre 0 mais la méthode de modélisation peut s'appliquer au développement de modèles d'ordre arbitraire comme cela a déjà été fait dans [2] mais dans le but différent de construire des conditions de radiation. Par ordre du modèle, on entend l'ordre minimal des opérateurs intervenant dans l'équation de transport.

Soit \mathbf{V}_0 la solution de (2.9). On introduit \mathbf{V}_1 le champ vectoriel tel que

$$\mathbf{V}_1 = (I + A_{-1}) \mathbf{V}_0 \quad (2.52)$$

où I est l'identité et A_{-1} doit être tel que \mathbf{V}_1 est la solution de :

$$(\mathbf{D}_z + i\omega(\Lambda_0 + \Lambda_{-1})) \mathbf{V}_1 = B_{-1} \mathbf{V}_1 + B_0 \mathbf{F}. \quad (2.53)$$

Les opérateurs B_{-1} et B_0 appartiennent à OPS^{-1} et OPS^0 respectivement. L'opérateur Λ_{-1} est diagonal et son symbole est une matrice diagonale dont les termes sont dans S^{-1} . Le système (2.53) est un modèle one-way d'ordre 0. Sa dérivation repose sur la détermination de A_{-1} . En utilisant le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels, A_{-1} est construit *via* son symbole, lequel est calculé en identifiant chaque symbole par son degré d'homogénéité.

Il est nécessaire ici de reconsidérer le modèle (2.53). Une lecture rapide peut laisser penser qu'il est identique au modèle (2.12) développé au paragraphe 2.3 qui consiste à inclure dans l'équation de transport les termes d'ordre 0 de transmission (*i.e.* l'opérateur \mathbf{R}_0^b). En d'autres termes, on pourrait croire que $\mathbf{R}_0^b = i\omega\Lambda_{-1}$ mais il n'en est rien car dans le nouveau modèle, les termes de couplage (B_{-1}) sont d'ordre -1 alors que dans (2.12), ils sont d'ordre 0. Le modèle (2.53) est donc réellement différent, et son développement sous-entend l'introduction d'une inconnue auxiliaire supplémentaire.

Pour commencer, on dérive la relation (2.52) par rapport à z . On obtient :

$$\mathbf{D}_z \mathbf{V}_1 = (\partial_z A_{-1}) \mathbf{V}_0 + (I + A_{-1}) \mathbf{D}_z \mathbf{V}_0. \quad (2.54)$$

Comme le champ \mathbf{V}_0 est solution de (2.9), la relation (2.54) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z \mathbf{V}_1 &= (\partial_z A_{-1}) \mathbf{V}_0 + (I + A_{-1}) Q_{-m} \mathbf{F} \\ &\quad - i\omega(I + A_{-1}) \Lambda_0 \mathbf{V}_0 + (I + A_{-1}) \mathbf{R}_0 \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

De plus, en utilisant le commutateur dont la définition est donnée au chapitre 1, on a :

$$\begin{cases} (I + A_{-1}) \Lambda_0 = \Lambda_0 (I + A_{-1}) + [A_{-1}, \Lambda_0] \\ (I + A_{-1}) \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 (I + A_{-1}) + [A_{-1}, \mathbf{R}_0] \end{cases} \quad (2.56)$$

et en injectant les relations (2.56) dans (2.55), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z \mathbf{V}_1 &= (\partial_z A_{-1}) \mathbf{V}_0 + (I + A_{-1}) Q_{-m} \mathbf{F} \\ &\quad - i\omega \Lambda_0 (I + A_{-1}) \mathbf{V}_0 + \mathbf{R}_0 (I + A_{-1}) \mathbf{V}_0 \\ &\quad - i\omega [A_{-1}, \Lambda_0] \mathbf{V}_0 + [A_{-1}, \mathbf{R}_0] \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

L'équation (2.57) conduit donc à une équation vérifiée par $\mathbf{V}_1 = (I + A_{-1})\mathbf{V}_0$ de la forme :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0) \mathbf{V}_1 &= (\partial_z A_{-1}) (I + A_{-1})^{-1} \mathbf{V}_1 & (2.58) \\ &+ (I + A_{-1}) Q_{-m} \mathbf{F} + \mathbf{R}_0 \mathbf{V}_1 \\ &- i\omega [A_{-1}, \Lambda_0] (I + A_{-1})^{-1} \mathbf{V}_1 + [A_{-1}, \mathbf{R}_0] (I + A_{-1})^{-1} \mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

Par définition, $(\partial_z A_{-1}) (I + A_{-1})^{-1} \in OPS^{-1}$ et $[A_{-1}, \mathbf{R}_0] (I + A_{-1})^{-1} \in OPS^{-1}$. Au second membre de (2.58), on repère les opérateurs d'ordre 0 et on pose ainsi le problème : trouver $A_{-1} \in OPS^{-1}$ tel que

$$\sigma_P (-i\omega [A_{-1}, \Lambda_0] (I + A_{-1})^{-1} + \mathbf{R}_0) = -i\omega \mathcal{M}_{-1}$$

où \mathcal{M}_{-1} est une matrice diagonale dont les termes sont des fonctions de S^{-1} . La matrice \mathcal{M}_{-1} est égale au symbole de l'opérateur Λ_{-1} cherché.

On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 2.4. *Soit $P_0 \in OPS^0$ un opérateur dont le symbole est une matrice \mathcal{P}_0 de vecteurs propres de la matrice \mathcal{L}_0^\sharp . Soit Q_0 l'inverse de P_0 . Il existe un opérateur $A_{-1} \in OPS^{-1}$ tel que si $\mathbf{V}_1 = (I + A_{-1})P_0\mathbf{U}$ où \mathbf{U} est solution du problème 2.7, \mathbf{V}_1 est solution de :*

$$(\mathbf{D}_z + i\omega(\Lambda_0 + \Lambda_1)) \mathbf{V}_1 = B_{-1} \mathbf{V}_1 + (I + A_{-1})Q_0 \mathbf{F}$$

où $\Lambda_{-1} \in OPS^{-1}$ est un opérateur diagonal et $B_{-1} \in OPS^{-1}$ est un opérateur de couplage dépendant de P_0 et de A_{-1} .

Démonstration. On s'appuie sur la formule (2.58). On a vu qu'il s'agit de construire A_{-1} tel que

$$\sigma_P (-i\omega [A_{-1}, \Lambda_0] (I + A_{-1})^{-1} + \mathbf{R}_0) = -i\omega \mathcal{M}_{-1}.$$

On rappelle que

$$\mathbf{R}_0 = -i\omega(\mathbf{R}_{-1} + Q_0 L_{-1}^\sharp P_0) - Q_0 \partial_z P_0,$$

où $\mathbf{R}_{-1} \in OPS^{-1}$. On a donc :

$$\sigma_P(\mathbf{R}_0) = -i\omega \sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) - i\omega \sigma_P(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0) - \sigma_P(Q_0 \partial_z P_0) \quad (2.59)$$

avec

$$\sigma_P(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0) = \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \mathcal{P}_0 \quad \text{et} \quad \sigma_P(Q_0 \partial_z P_0) = \mathcal{P}_0^{-1} \partial_z \mathcal{P}_0 \quad (2.60)$$

Le terme le plus compliqué à calculer est associé à \mathbf{R}_{-1} . La définition de \mathbf{R}_{-1} va nécessiter de calculer plusieurs termes dans le développement du symbole de Q_0 . Aussi, on commence par présenter le résultat suivant :

Lemme 2.5. *Le symbole de l'inverse de P_0 est donné par :*

$$\sigma(Q_0) = \mathcal{P}_0^{-1} + \sigma_{-1}(Q_0) + \sigma_{-2}(Q_0) \quad \text{mod. } S^{-3}$$

avec

$$\begin{aligned}\sigma_{-1}(Q_0) &= i\mathcal{P}_0^{-1} [\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{P}_0^{-1}] \\ \sigma_{-2}(Q_0) &= \mathcal{P}_0^{-1} \left[i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} (\sigma_{-1}(Q_0)) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0 \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \right]\end{aligned}$$

Démonstration. On applique la formule d'inversion du chapitre 1. On doit calculer $\sigma(Q_0)$ de telle sorte que

$$\sum_{\alpha \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0 \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma(Q_0) = I_2 \quad (2.61)$$

où I_2 désigne la matrice identité. On développe $\sigma(Q_0)$ sous la forme

$$\sigma(Q_0) \sim \sigma_P(Q_0) + \sigma_{-1}(Q_0) + \sigma_{-2}(Q_0) + \dots$$

où chaque symbole $\sigma_{-j}(Q_0) \in S^{-j}$ et $\sigma_P(Q_0) \in S^0$. Si on identifie dans (2.61) les coefficients de S^0 , on obtient :

$$\mathcal{P}_0 \sigma_P(Q_0) = I_2$$

ce qui entraîne

$$\sigma_P(Q_0) = \mathcal{P}_0^{-1}.$$

Ensuite, si on identifie les termes de S^{-1} , on obtient la relation

$$-i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}\sigma_P(Q_0) + \mathcal{P}_0\sigma_{-1}(Q_0) = 0$$

ce qui entraîne :

$$\sigma_{-1}(Q_0) = i\mathcal{P}_0^{-1} [\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{P}_0^{-1}].$$

On finit en considérant les termes de S^{-2} . Il vient :

$$\mathcal{P}_0\sigma_{-2}(Q_0) - i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} (\sigma_{-1}(Q_0)) - \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0 \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} = 0$$

ce qui donne comme relation :

$$\sigma_{-2}(Q_0) = \mathcal{P}_0^{-1} \left[i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} (\sigma_{-1}(Q_0)) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0 \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \right],$$

et achève la preuve du lemme. ■

On démontre ensuite le résultat suivant :

Lemme 2.6. *Le symbole de l'opérateur \mathbf{R}_{-1} est donné par*

$$\sigma(\mathbf{R}_{-1}) = \sigma_{-1} + \sigma_{-2} \text{ mod. } S^{-3} \quad (2.62)$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} = & -i \left\{ \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right\} \\ & + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{-2} = & -\mathcal{P}_0^{-1} \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{L}_0^\# \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0 - \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \right) \\ & - \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - i \sigma_{-1}(Q_0) \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \\ & - i \nabla_{\mathbf{k}'} (\sigma_{-1}(Q_0)) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) + \sigma_{-2}(Q_0) \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{R}_{-1}) &= \sigma(Q_0 L_0^\# \mathcal{P}_0 - \Lambda_0) \\ &= \sum_{\alpha \leq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma(Q_0) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - \mathcal{M}_0 \end{aligned}$$

Comme $\sigma(Q_0) \sim \mathcal{P}_0^{-1} + \sigma_{-1}(Q_0) + \sigma_{-2}(Q_0) + \eta_{-3}$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{R}_{-1}) &= \sum_{\alpha \leq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\ &+ \sum_{\alpha \leq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma_{-1}(Q_0) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\ &+ \sum_{\alpha \leq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma_{-2}(Q_0) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - \mathcal{M}_0 \text{ mod. } S^{-3} \end{aligned}$$

En développant chacune des sommes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{R}_{-1}) &= \mathcal{P}_0^{-1} \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\ &- \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\ &+ \sigma_{-1}(Q_0) \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - i \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma_{-1}(Q_0) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\ &+ \sigma_{-2}(Q_0) \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - \mathcal{M}_0 \text{ mod. } S^{-3} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \sigma \left(L_0^\# \mathcal{P}_0 \right) &= \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \\ &- \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{L}_0^\# \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0 \text{ mod. } S^{-3} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{R}_{-1}) &= \mathcal{P}_0^{-1} \left\{ \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 - \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{L}_0^\# \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0 + \eta_{-3} \right\} \\
&- i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left\{ \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \right\} \\
&- \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\
&+ \sigma_{-1}(Q_0) \left\{ \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \right\} \\
&- i \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma_{-1}(Q_0) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \\
&+ \sigma_{-2}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 - \mathcal{M}_0 \text{ mod. } S^{-3}
\end{aligned}$$

On rappelle alors que $\mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 = \mathcal{M}_0$ et en ordonnant les termes selon leur degré d'homogénéité, il vient :

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathbf{R}_{-1}) &= \left\{ -i \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right\} \\
&- \left\{ \mathcal{P}_0^{-1} \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{L}_0^\# \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) + i \sigma_{-1}(Q_0) \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 \right. \\
&\quad \left. + i \nabla_{\mathbf{k}'} (\sigma_{-1}(Q_0)) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) - \sigma_{-2}(Q_0) \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right\} \text{ mod. } S^{-3}
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.6. ■

On en déduit du lemme 2.6 que :

$$\begin{aligned}
\sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) &= -i \left\{ \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right\} \\
&\quad + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Finalement, en injectant (2.60) et (2.65) dans (2.59), on obtient l'expression de $\sigma_P(\mathbf{R}_0)$, à savoir :

$$\begin{aligned}
\sigma_P(\mathbf{R}_0) &= -\omega \left\{ \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right\} \\
&\quad - i\omega \left(\sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\# \mathcal{P}_0 \right) - \mathcal{P}_0^{-1} \partial_z \mathcal{P}_0
\end{aligned} \tag{2.66}$$

De plus, par définition du commutateur, comme A_{-1} et Λ_0 sont des opérateurs matriciels, $[A_{-1}, \Lambda_0] \in \text{OPS}^{-1}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_P(-i\omega [A_{-1}, \Lambda_0] (I + A_{-1})^{-1}) &= -i\omega \sigma_P [A_{-1}, \Lambda_0] \\
&= -i\omega \{ \sigma(A_{-1}) \mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_0 \sigma(A_{-1}) \}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

En reportant (2.66) et (2.67) dans l'équation à résoudre, on cherche donc une matrice $\sigma(A_{-1})$ telle que, si on pose

$$\begin{aligned} i\omega\mathcal{M}_{-1} &= -i\omega \{ \sigma(A_{-1})\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_0\sigma(A_{-1}) \} \\ &+ \omega \left\{ \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right\} \\ &+ i\omega \left(\sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\# \mathcal{P}_0 \right) + \mathcal{P}_0^{-1} \partial_z \mathcal{P}_0, \end{aligned}$$

\mathcal{M}_{-1} est diagonale.

Si $(a_{jl})_{1 \leq j, l \leq 2}$ représentent les coefficients de la matrice $\sigma(A_{-1})$, on obtient

$$\begin{aligned} -i\omega\mathcal{M}_{-1} &= -\mathcal{P}_0^{-1} (\partial_z \mathcal{P}_0) - i\omega \left(2\gamma_0 \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\# \mathcal{P}_0 \right) \\ &- i\omega \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 - \omega \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 - \omega \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right), \end{aligned}$$

et les coefficients a_{12} et a_{21} sont calculés pour que \mathcal{M}_{-1} soit une matrice diagonale. \blacksquare

On peut remarquer que la matrice $\sigma(A_{-1})$ n'est pas définie de façon unique puisque ses termes diagonaux ne jouent aucun rôle. On peut donc construire une infinité de modèles d'ordre 0 pour un modèle d'ordre 1 fixé correspondant à un choix de \mathcal{P}_0 .

Evidemment, la décomposition peut être poursuivie. En effet, on peut introduire une inconnue auxiliaire $\mathbf{V}_2 = (I + A_{-2}) \mathbf{V}_1$ où $A_{-2} \in \text{OPS}^{-2}$ est construit de telle sorte que \mathbf{V}_2 est solution de :

$$(\mathbf{D}_z + i\omega (\Lambda_0 + \Lambda_{-1} + \Lambda_{-2})) \mathbf{V}_2 = B_{-2} \mathbf{V}_2 + (I + A_{-2})(I + A_{-1}) Q_0 \mathbf{F}.$$

L'opérateur $\Lambda_{-2} \in \text{OPS}^{-2}$ est diagonal, $B_{-2} \in \text{OPS}^{-2}$ est défini à partir de l'étape précédente. En itérant ce procédé, on peut construire des modèles de tout ordre. On ne considèrera pas ces modèles mais on renvoie le lecteur à [2] où les calculs ont été développés pour construire des conditions de radiation en électromagnétisme. On mentionne quand même que la dérivation à un ordre plus élevé est assez technique.

En comparant (2.9) avec (2.58), il est évident que les termes de couplages du nouveau système sont plus difficiles à écrire. On poursuit donc par la dérivation d'un modèle one-way pour lequel les termes de couplage ne seront représentés que par leurs symboles principaux ce qui simplifie considérablement le modèle. Dans la suite, on choisit $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{0,LR}$. Afin que \mathcal{M}_{-1} soit une matrice diagonale, on doit choisir les coefficients a_{12} et a_{21} tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12} = -\frac{i}{4\omega\gamma_0} (\gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0 - \rho^{-1} \partial_z \rho) + \frac{i}{4\omega^2 \rho \gamma_0^2} \nabla_{\mathbf{x}'} \rho \cdot \mathbf{k}' - \frac{i}{4\gamma_0^2} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \gamma_0 \\ \quad + \frac{i}{2\rho\gamma_0} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \rho \\ a_{21} = \frac{i}{4\omega\gamma_0} (\gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0 + \rho^{-1} \partial_z \rho) + \frac{i}{4\omega^2 \rho \gamma_0^2} \nabla_{\mathbf{x}'} \rho \cdot \mathbf{k}' - \frac{i}{4\gamma_0^2} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \gamma_0 \\ \quad + \frac{i}{2\rho\gamma_0} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \rho \end{array} \right. \cdot (2.68)$$

En calculant les dérivées de γ_0 par rapport à \mathbf{k}' et \mathbf{x}' , on obtient :

$$\begin{cases} a_{12} &= -\frac{i}{4\omega\gamma_0} (\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0 - \rho^{-1}\partial_z\rho) - \frac{i}{4\omega^2\rho\gamma_0^2} \nabla_{\mathbf{x}'}\rho \cdot \mathbf{k}' - \frac{i}{4\omega^2c^3\gamma_0^4} \nabla_{\mathbf{x}'}c \cdot \mathbf{k}' \\ a_{21} &= -\frac{i}{4\omega\gamma_0} (\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0 - \rho^{-1}\partial_z\rho) + \frac{i}{4\omega^2\rho\gamma_0^2} \nabla_{\mathbf{x}'}\rho \cdot \mathbf{k}' + \frac{i}{4\omega^2c^3\gamma_0^4} \nabla_{\mathbf{x}'}c \cdot \mathbf{k}' \end{cases} \quad (2.69)$$

et des calculs assez longs conduisent à :

$$\begin{cases} i\omega (\mathcal{M}_{-1})_{11} &= \frac{1}{2} (\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0 + \rho^{-1}\partial_z\rho) - \frac{1}{2\omega\rho\gamma_0} \nabla_{\mathbf{x}'}\rho \cdot \mathbf{k}' - \frac{1}{2\omega c^3\gamma_0^3} \nabla_{\mathbf{x}'}c \cdot \mathbf{k}' \\ i\omega (\mathcal{M}_{-1})_{22} &= \frac{1}{2} (\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0 + \rho^{-1}\partial_z\rho) + \frac{1}{2\omega\rho\gamma_0} \nabla_{\mathbf{x}'}\rho \cdot \mathbf{k}' + \frac{1}{2\omega c^3\gamma_0^3} \nabla_{\mathbf{x}'}c \cdot \mathbf{k}' \end{cases}$$

On propose alors le nouveau modèle one-way suivant :

Corollaire 2.7. *Soit P_0 l'opérateur de OPS^0 dont le symbole est $\mathcal{P}_{0,LR}$. Alors il existe un opérateur $A_{-1} \in OPS^{-1}$ tel que si $\mathbf{V}_1 = (I + A_{-1})P_0\mathbf{U}$ où \mathbf{U} est solution du problème 2.7, \mathbf{V}_1 est solution de :*

$$(\mathbf{D}_z + i\omega(\Lambda_0 + \Lambda_{-1}))\mathbf{V}_1 = \tilde{B}_{-1}\mathbf{V}_1 + (I + A_{-1})P_0\mathbf{F},$$

où $\tilde{B}_{-1} \in OPS^{-1}$ est la partie principale du terme de couplage donné par B_{-1} .

Démonstration. L'opérateur B_{-1} est défini par :

$$\begin{aligned} B_{-1} &= -i\omega \text{Op} \left(\sigma_{-2} \left(Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\# \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right) \right) \\ &\quad - i\omega \text{Op} \left(\sigma_{-2} \left(\left[A_{-1}, \Lambda_0 + Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\# \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right] (I + A_{-1})^{-1} \right) \right) \\ &\quad - \text{Op} \left(\sigma_{-1} (Q_0 (\partial_z P_0)) \right) \\ &\quad + \text{Op} \left(\sigma_P \left((\partial_z A_{-1}) (I + A_{-1})^{-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Le terme le plus simple est $\sigma_P \left((\partial_z A_{-1}) (I + A_{-1})^{-1} \right) = \partial_z \sigma(A_{-1})$. Ensuite, d'après la formule de composition donnée au chapitre 1, on a :

$$\sigma(Q_0(\partial_z P_0)) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma(Q_0) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha (\partial_z P_0).$$

Le symbole de Q_0 est de la forme :

$$\sigma(Q_0) \sim \mathcal{P}_0^{-1} + \sigma_{-1}(Q_0) + \sigma_{-2}(Q_0) \text{ mod. } S^{-3}$$

où $\sigma_{-j}(Q_0) \in S^j$ est donné au lemme 2.5. On a :

$$\sigma(Q_0(\partial_z P_0)) \sim \sigma(Q_0)(\partial_z P_0) - i \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma(Q_0) \nabla_{\mathbf{x}'} (\partial_z P_0) \text{ mod. } S^{-2}.$$

En identifiant les degrés d'homogénéité, on obtient que :

$$\sigma_{-1}(Q_0(\partial_z P_0)) = \sigma_{-1}(Q_0)(\partial_z P_0) - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} (\partial_z P_0). \quad (2.70)$$

Le terme suivant s'écrit

$$\sigma_{-2} \left(\left[A_{-1}, \Lambda_0 + Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right] (I + A_{-1})^{-1} \right).$$

D'après l'ordre de chaque opérateur, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{-2} \left(\left[A_{-1}, \Lambda_0 + Q_0 L_{-1}^\sharp P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right] (I + A_{-1})^{-1} \right) &= \sigma_{-2} ([A_{-1}, \Lambda_0]) \quad (2.71) \\ &- \sigma_P ([A_{-1}, \Lambda_0] A_{-1}) + \sigma_P \left(\left[A_{-1}, Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right] \right). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\sigma_P ([A_{-1}, \Lambda_0] A_{-1}) = \sigma(A_{-1}) \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \sigma(A_{-1}) - \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} (\sigma(A_{-1}))^2. \quad (2.72)$$

De plus,

$$\sigma_{-2} ([A_{-1}, \Lambda_0]) = \sigma_{-2} (A_{-1} \Lambda_0) - \sigma_2 (\Lambda_0 A_{-1})$$

qui devient :

$$\sigma_{-2} ([A_{-1}, \Lambda_0]) = i \left(\nabla_{\mathbf{k}'} \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}'} (\partial_z \sigma(A_{-1})) - \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma(A_{-1}) \nabla_{\mathbf{x}'} \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \right). \quad (2.73)$$

On doit aussi calculer :

$$\begin{aligned} \sigma_P \left(\left[A_{-1}, Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right] \right) &= \sigma_P \left(A_{-1} Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 + A_{-1} \mathbf{R}_{-1} \right) \\ &- \sigma_P \left(Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 A_{-1} + \mathbf{R}_{-1} A_{-1} \right) \end{aligned}$$

qui se développe sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_P \left(\left[A_{-1}, Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right] \right) &= \sigma(A_{-1}) \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \mathcal{P}_0 + \sigma(A_{-1}) \sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) \\ &- \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \mathcal{P}_0 \sigma(A_{-1}) + \sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) \sigma(A_{-1}) \quad (2.74) \end{aligned}$$

Et enfin, le dernier terme est donné par :

$$\sigma_{-2} \left(Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 + \mathbf{R}_{-1} \right) = \sigma_{-2} \left(Q_0 \text{Op} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp \right) P_0 \right) + \sigma_{-2} (\mathbf{R}_{-1}). \quad (2.75)$$

D'après la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels, on a :

$$\sigma \left(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0 \right) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma(Q_0) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \left(\sigma \left(L_{-1}^\sharp P_0 \right) \right)$$

qui se développe en :

$$\sigma \left(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0 \right) \sim \sigma(Q_0) \sigma(L_{-1}^\sharp P_0) - i \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma(Q_0) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \sigma(L_{-1}^\sharp P_0) \text{ mod. } S^{-3} \quad (2.76)$$

Si on considère le développement du symbole de $L_{-1}^\sharp P_0$, on a :

$$\begin{aligned}\sigma\left(L_{-1}^\sharp P_0\right) &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{L}_{-1}^\sharp \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha P_0 \\ &= \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 + \eta_{-3}\end{aligned}$$

En injectant cette relation dans (2.76), il vient :

$$\begin{aligned}\sigma\left(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0\right) &\sim \sigma(Q_0) \left\{ \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 \right\} \\ &\quad - i \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma(Q_0) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \sigma\left(L_{-1}^\sharp P_0\right) + \eta_{-3}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sigma\left(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0\right) &= \mathcal{P}_0^{-1} \left\{ \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 \right\} \\ &\quad + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 \right) + \eta_{-3}\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\sigma_{-2}\left(Q_0 L_{-1}^\sharp P_0\right) &= -i \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 \\ &\quad - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 \right)\end{aligned}\tag{2.77}$$

et (2.77) est entièrement calculé en utilisant le lemme 2.5 pour $\sigma_{-1}(Q_0)$.

Il reste à calculer $\sigma_{-2}(\mathbf{R}_{-1})$. Pour cela, on applique les lemmes 2.5 et 2.6.

En collectant les résultats (2.70), (2.72), (2.73), (2.74), (2.64) et (2.77), on obtient le symbole de \tilde{B}_{-1} :

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{B}_{-1}) &= -i\omega \left[-i \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_{-1}^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 - i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 \right) \right. \\ &\quad + \sigma_{-2}(\mathbf{R}_{-1}) + i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{M}_0 \nabla_{\mathbf{x}'} (\partial_z \sigma(A_{-1})) - \nabla_{\mathbf{k}'} \sigma(A_{-1}) \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{M}_0 \\ &\quad + \sigma(A_{-1}) \mathcal{M}_0 \sigma(A_{-1}) - \mathcal{M}_0 (\sigma(A_{-1}))^2 \\ &\quad + \sigma(A_{-1}) \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 + \sigma(A_{-1}) \sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) - \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\sharp P_0 \sigma(A_{-1}) + \sigma_P(\mathbf{R}_{-1}) \sigma(A_{-1}) \left. \right] \\ &\quad - \sigma_{-1}(Q_0) (\partial_z P_0) + i \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} (\partial_z P_0) + \partial_z (\sigma(A_{-1}))\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}\sigma_{-1}(\mathbf{R}_{-1}) &= -i \left\{ \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\sharp \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\sharp P_0 \right) \right\} \\ &\quad + \sigma_{-1}(Q_0) \mathcal{L}_0^\sharp P_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{-2}(\mathbf{R}_{-1}) &= -\mathcal{P}_0^{-1} \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{L}_0^\sharp \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha P_0 - \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 \right) \\ &\quad - \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \left(\mathcal{L}_0^\sharp P_0 \right) - i \sigma_{-1}(Q_0) \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\sharp \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} P_0 \\ &\quad - i \nabla_{\mathbf{k}'} (\sigma_{-1}(Q_0)) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\sharp P_0 \right) + \sigma_{-2}(Q_0) \left(\mathcal{L}_0^\sharp P_0 \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{-1}(Q_0) &= i\mathcal{P}_0^{-1} [\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}\mathcal{P}_0^{-1}], \\ \sigma_{-2}(Q_0) &= \mathcal{P}_0^{-1} \left[i\nabla_{\mathbf{k}'}\mathcal{P}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}(\sigma_{-1}(Q_0)) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \mathcal{P}_0 \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \mathcal{P}_0^{-1} \right].\end{aligned}$$

Le nouveau modèle est ainsi construit. ■

On peut remarquer dans la formule exprimant le symbole de $i\omega\Lambda_{-1}$ que dans chacun des termes, on retrouve le symbole principal de T_0 en première position. On fait donc intervenir le même opérateur que dans le cas où on prend des termes de couplage d'ordre 0 qui est, ici, perturbé par un opérateur faisant intervenir les variations latérales de vitesse. En effet, les autres termes font intervenir les variations latérales de vitesse par le biais du gradient $\nabla_{\mathbf{x}'}$. Dans ce nouveau modèle, on a l'expression exacte des termes d'ordre 0 qui participent à l'équation de transport.

Chapitre 3

Présentation du code et des modèles de vitesse utilisés

Ce chapitre est rédigé dans le but de donner une vision globale du fonctionnement du code de calcul qui a été développé. Ce code vient d'un code 2D écrit en C par J. Le Rousseau [61]. Il est aujourd'hui disponible en Fortran 90, en 2D et 3D. Son architecture a été modifiée, d'une part pour optimiser les coûts de calcul (séries de Bremmer), et d'autre part pour en faire un code composé de modules inter-changeables. On dispose ainsi d'un code de calcul assez souple dans lequel on peut tester diverses méthodes de calcul en changeant de module.

Les calculs s'articulent autour de deux routines dédiées aux opérateurs de propagation et de réflexion. Pour des raisons de simplicité, ces deux routines sont décrites dans des chapitres à part (4 pour la propagation, 5 pour la réflexion). Notre but est seulement de décrire la méthode de calcul et d'expliquer comment est construit le code.

Les deux premières parties de ce chapitre décrivent la méthode de résolution. Celle-ci repose sur un développement de la solution en série de Bremmer. Le calcul de cette série revient à décomposer le problème en une suite de problèmes one-way élémentaires qui sont ensuite corrigés par les termes de couplage. Cette décomposition offre l'avantage de déterminer successivement les réflexions multiples. Or ces réflexions sont difficiles à interpréter, à tel point qu'à l'heure actuelle, les géophysiciens préfèrent les éliminer, si possible, avant interprétation des résultats. Toute méthode numérique permettant de calculer les multiples, pour ensuite les éliminer intéresse donc les géophysiciens. La méthode GSP en est une. Dans une troisième partie, on écrit l'organigramme du code et on finit dans une quatrième partie en donnant la liste de tous les modèles de vitesse qui seront testés au chapitre 6.

Nous nous limitons désormais au cas où ρ est constant. Le cas ρ est variable fera l'objet de développements futurs.

3.1 Principales étapes de la résolution

Dans le cas où la masse volumique ρ est constante, le problème à résoudre s'écrit

$$\left(\mathbf{D}_z + i\omega L_0^\sharp \right) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

et on rappelle que

$$\mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix}, \quad L_0^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \frac{1}{c^2\rho} + \frac{1}{\omega^2\rho}\Delta_\perp & 0 \end{pmatrix}$$

où l'opérateur Δ_\perp désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_\perp = \partial_x^2 + \partial_y^2$. L'inconnue \mathbf{U} est un vecteur dont les composantes sont les transformées de Laplace de la pression p et de la composante u_z de la vitesse de déplacement. Quant à la source \mathbf{F} , elle est donnée par la transformée de Laplace de la source q : $\mathbf{F} = {}^t(0, \hat{q})$.

Au problème (3.1), on associe le modèle GSP de la forme :

$$\left(\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \epsilon \mathbf{R}_{0,P}^b \right) \mathbf{V} = \left((1 - \epsilon) \mathbf{R}_{0,P}^b + \mathbf{R}_{0,P}^\sharp \right) \mathbf{V} + \mathbf{S} \quad (3.2)$$

où Λ_0 est l'opérateur diagonal de OPS⁰ dont le symbole est la matrice diagonale

$$\mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Le symbole $\gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}}$ et son opposé $-\gamma_0$ sont les valeurs propres du symbole \mathcal{L}_0^\sharp de L_0^\sharp . L'inconnue auxiliaire \mathbf{V} , dont les composantes sont les champs descendant V_+ et montant V_- , est liée à \mathbf{U} par la relation $\mathbf{U} = P_0 \mathbf{V}$ où P_0 est l'opérateur de OPS⁰ dont le symbole est la matrice $\mathcal{P}_{0,LR}$ introduite au chapitre précédent et référencée par (2.20). En faisant ce choix, on obtient

$$\mathbf{R}_{0,P}^b = -\frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0 I_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{0,P}^\sharp = \frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0 J_2$$

où $\Gamma_0 \in \text{OPS}^0$ est l'opérateur dont le symbole vaut γ_0 . Comme le terme $\mathbf{R}_{0,P}^b$ ne contribue pas au couplage des composantes descendante V_+ et montante V_- , il peut être vu comme participant à la transmission (soit dans le terme de droite si $\epsilon = 0$, soit dans le terme de gauche si $\epsilon = 1$) tandis que $\mathbf{R}_{0,P}^\sharp$ joue le rôle de l'opérateur de réflexion puisqu'il transforme un champ descendant en champ montant et réciproquement. Aussi, pour simplifier, on note dans la suite :

$$\mathbf{R}_{0,P}^b = T_0 I_2, \quad \mathbf{R}_{0,P}^\sharp = R_0 J_2$$

avec T pour la Transmission, R pour la Réflexion et l'indice 0 signifie que les opérateurs sont d'ordre 0.

On cherche donc à résoudre deux modèles qui ont fait l'objet, au chapitre 2, des proposition 2.1 et corollaire 2.2 pour le choix particulier de $m = 0$ et $\sigma(P_0) = \mathcal{P}_{0,LR}$.

Le terme source \mathbf{S} est lié à la source \mathbf{F} par la relation : $\mathbf{F} = P_0 \mathbf{S}$.

On introduit la notation :

$$M^\epsilon = i\omega\Lambda_0 - \epsilon T_0 I_2.$$

La résolution de (3.2) requiert l'inversion de l'opérateur $\mathbf{D}_z + M^\epsilon$. L'opérateur inverse noté G^ϵ est appelé le propagateur. C'est lui qui régit la descente et la montée d'une onde le long de l'axe Oz . Comme M^ϵ , G^ϵ est un opérateur diagonal de la forme :

$$G^\epsilon = \begin{pmatrix} G_+^\epsilon & 0 \\ 0 & G_-^\epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Supposons que l'opérateur G^ϵ est déterminé. Le problème (3.2) peut donc se transformer en :

$$\mathbf{V} = G^\epsilon ((1 - \epsilon)T_0 I_2 + R_0 J_2) \mathbf{V} + G^\epsilon \mathbf{S}$$

soit encore, si on note $K^\epsilon = G^\epsilon ((1 - \epsilon)T_0 I_2 + R_0 J_2)$,

$$(I_2 - K^\epsilon) \mathbf{V} = G^\epsilon \mathbf{S}. \quad (3.4)$$

Il ne reste donc plus qu'à inverser l'opérateur $(I_2 - K^\epsilon)$. Par construction, l'opérateur $K^\epsilon \in \text{OPS}^{-1}$ car K^ϵ est obtenu par composition de $G^\epsilon \in \text{OPS}^{-1}$, qui est l'inverse de $\mathbf{D}_z + M^\epsilon \in \text{OPS}^1$, et de $((1 - \epsilon)T_0 I_2 + R_0 J_2) \in \text{OPS}^0$. On a donc, au sens des opérateurs [66] :

$$(I_2 - K^\epsilon)^{-1} = \sum_{j \geq 0} (K^\epsilon)^j. \quad (3.5)$$

Cette représentation correspond à un développement en série de Neumann de l'inverse de $I_2 - K^\epsilon$, sous l'hypothèse $\|K^\epsilon\| < 1$.

On va utiliser la représentation (3.5) pour développer \mathbf{V} sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \sum_{j \geq 0} \mathbf{V}^{(j)} \\ \mathbf{V}^0 = G^\epsilon \mathbf{S} \text{ et } \mathbf{V}^{(j)} = K^\epsilon \mathbf{V}^{(j-1)}, j \geq 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Cette représentation de l'inconnue \mathbf{V} est appelée développement en série de Bremmer et fait référence aux travaux précurseurs [17] pour le cas simple d'un modèle stratifié 1D.

Chaque itéré $\mathbf{V}^{(j)}$ a deux composantes notées $V_+^{(j)}$ et $V_-^{(j)}$ où l'indice + désigne la composante descendante se propageant dans le sens des z croissants et l'indice - est liée à la composante montante.

Par définition de la source $\mathbf{F} = {}^t(0, \hat{q})$, la source \mathbf{S} a *a priori* deux composantes non nulles S_+ et S_- et le premier itéré a pour composantes :

$$V_+^{(0)} = G_+^\epsilon S_+ \text{ et } V_-^{(0)} = G_-^\epsilon S_-.$$

Ainsi défini, le premier itéré va permettre de construire le second itéré $\mathbf{V}^{(1)}$ grâce aux formules :

$$\begin{cases} V_+^{(1)} = K_{11}^\epsilon V_+^{(0)} + K_{12}^\epsilon V_-^{(0)} \\ V_-^{(1)} = K_{21}^\epsilon V_+^{(0)} + K_{22}^\epsilon V_-^{(0)} \end{cases}$$

où K_{lm}^ϵ , $1 \leq l, m \leq 2$ correspondent aux coefficients de l'opérateur K^ϵ .

Cependant, si on revient à la configuration présentée au début du chapitre 2, la zone d'étude Ω est située entre $z = 0$ et $z = z_{max}$, entourée par deux domaines homogènes Ω_{inf} (pour $z > z_{max}$) et Ω_{sup} (pour $z < 0$). Or, le champ $V_-^{(0)}$ représente la propagation vers le haut de la composante S_- de la source \mathbf{S} , laquelle est localisée en surface c'est-à-dire en $z = 0$. Par conséquent, le support de $V_-^{(0)}$ est inclus dans Ω_{sup} . Mais les géophones (récepteurs) sont situés dans le domaine Ω , donc ils n'enregistrent jamais $V_-^{(0)}$. De plus, les domaines Ω_{inf} et Ω_{sup} sont supposés homogènes. Ils ne génèrent donc aucun phénomène de réflexion. Si on considère l'opérateur K^ϵ représenté à partir de son symbole principal :

$$\sigma_P(K^\epsilon) = \sigma_P(G^\epsilon) (\sigma(T_0)(1 - \epsilon)I_2 + \sigma(R_0)J_2),$$

et que l'on choisit P_0 de telle sorte que $\sigma(T_0) = -\sigma(R_0)$, on a, dans Ω_{sup} , $\sigma_P(K^\epsilon) = 0$. On obtient donc, comme K^ϵ est un opérateur pseudo-différentiel dépendant continûment du paramètre z , $K_{l2}^\epsilon V_-^{(0)} = 0$, $1 \leq l \leq 2$. Il ne sera donc pas nécessaire de calculer $V_-^{(0)}$ dans ce cas. Toutefois, le calcul de $V_-^{(0)}$ est possible dans le code car nécessaire si on envisage le cas d'une source enfouie (localisée à l'intérieur de Ω). Il s'ensuit l'expression simplifiée de $\mathbf{V}^{(1)}$:

$$V_+^{(1)} = K_{11}^\epsilon V_+^{(0)} \quad \text{et} \quad V_-^{(1)} = K_{21}^\epsilon V_+^{(0)}$$

tandis que les itérés suivants seront des combinaisons des champs montant et descendant :

$$\begin{cases} V_+^{(j)} = K_{11}^\epsilon V_+^{(j-1)} + K_{12}^\epsilon V_-^{(j-1)} \\ V_-^{(j)} = K_{21}^\epsilon V_+^{(j-1)} + K_{22}^\epsilon V_-^{(j-1)}. \end{cases}$$

avec $j \geq 2$. On peut observer que si on choisit $\epsilon = 1$, les itérés s'expriment plus simplement car $K_{11}^\epsilon = K_{22}^\epsilon = 0$, ce qui entraîne $V_+^{(1)} = 0$ et ensuite, par récurrence, on obtient :

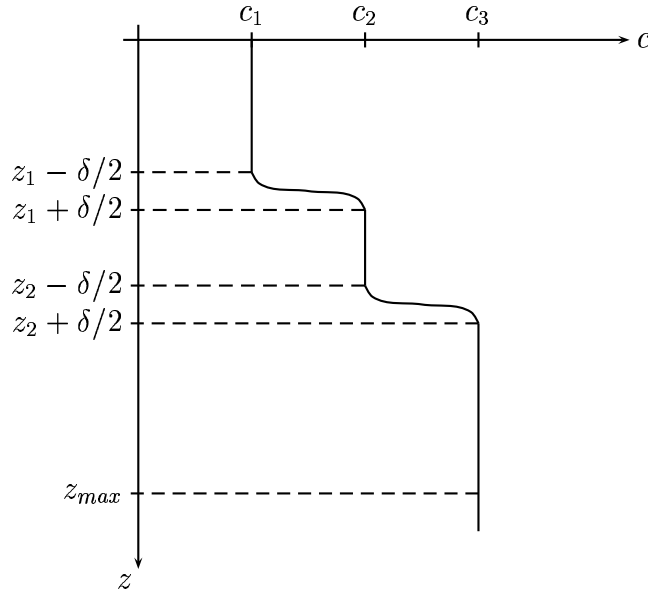
$$V_+^{(2j+1)} = 0 \quad \text{et} \quad V_-^{(2j)} = 0, \quad j \geq 0.$$

Chaque itéré a donc pour composante nulle, soit un champ montant, soit un champ descendant, ce qui montre un certain découplage dans la méthode de résolution et fait penser au principe des équations paraxiales.

Si on récapitule, la résolution du système (3.1) passe par les différentes étapes suivantes :

1. décomposition de la source : $\mathbf{S} = P_0^{-1} \mathbf{F}$
2. calcul des itérés de Bremmer à partir des opérateurs de propagation G^ϵ , réflexion R_0 et transmission T_0 .
3. recomposition de la solution : $\mathbf{U} = P_0 \mathbf{V}$.

Le cœur de l'algorithme se situe au point 2. Afin de préciser son contenu, nous allons considérer au paragraphe suivant un modèle tri-couche dont la relative simplicité permet de décrire les calculs.

FIG. 3.1 – Profil de vitesse pour $c_1 < c_2 < c_3$

3.2 Série de Bremmer appliquée à un cas simple

La méthode de résolution repose sur un développement en série de Bremmer dont on doit calculer un certain nombre de termes. Afin de fixer les idées, nous allons détailler les calculs dans le cas d'un modèle Ω tri-couche 2D. Le modèle de vitesse exact s'écrit de la façon suivante (voir Fig. 3.1). La première couche est supposée homogène d'épaisseur $z_1 - \frac{\delta}{2}$ où δ est un petit paramètre et la vitesse de propagation associée est une constante notée c_1 . Puis, sur une fine couche d'épaisseur δ , la vitesse passe continûment de la valeur constante c_1 à la valeur constante c_2 qui représente la vitesse de propagation dans la couche d'épaisseur $(z_2 - z_1) - \delta$. A nouveau, sur une fine couche d'épaisseur δ , la vitesse passe continûment de la valeur constante c_2 à la valeur constante c_3 .

Les interfaces entre chaque milieu sont horizontales et sont associées à des variations de vitesse qui sont d'autant plus brusques que δ est petit.

Tant que l'on est à l'intérieur d'une couche homogène, aucun phénomène de réflexion n'a lieu. Au niveau des opérateurs, cela se traduit par le fait que le symbole de l'opérateur de réflexion, et par conséquent de l'opérateur de transmission du fait du choix de l'opérateur P_0 , est nul à l'intérieur de chaque couche homogène. On a donc ici :

$$\sigma(R_0) = \sigma(T_0) = 0 \text{ si } z \in \left\{ z \leq z_1 - \frac{\delta}{2} \right\} \cup \left[z_1 + \frac{\delta}{2}, z_2 - \frac{\delta}{2} \right] \cup \left\{ z \geq z_2 + \frac{\delta}{2} \right\} \quad (3.7)$$

3.2.1 Calcul des itérés avant discrétisation

Nous donnons ici l'expression des itérés 0, 1 et 2. Les itérés suivants se déduisent directement de l'itéré 2. On rappelle que $G^\epsilon = \begin{pmatrix} G_+^\epsilon & 0 \\ 0 & G_-^\epsilon \end{pmatrix}$ et nous commençons par faire quelques hypothèses sur G_\pm^ϵ qui seront précisées au chapitre 4. On va supposer que si $\varphi = {}^t(\varphi_+, \varphi_-)$ est une fonction test dépendant des variables \mathbf{x}' et z , on a :

$$G_+^\epsilon \varphi_+ = \int_0^z G_+^\epsilon(h, z) \varphi_+(h) dh \quad (3.8)$$

et

$$G_-^\epsilon \varphi_- = \int_{z_{max}}^z G_-^\epsilon(h, z) \varphi_-(h) dh \quad (3.9)$$

où $G_\pm^\epsilon(h, z)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels dépendant continûment des variables h et z . Nous reviendrons sur la représentation (3.8,3.9) au chapitre 4 consacré à l'opérateur de propagation.

Itéré de Bremmer n°0

Nous avons déjà expliqué que, dans le cas que nous considérons, il n'est pas utile de calculer $V_-^{(0)}$ et que sa valeur n'intervient pas dans le calcul de $\mathbf{V}^{(1)}$. On va donc imposer :

$$\forall z \in [0, z_{max}], V_-^{(0)}(z) = 0$$

Ensuite, par définition de $V_+^{(0)}$, on a

$$\forall 0 \leq z \leq z_{max}, V_+^{(0)}(z) = \int_0^z G_+^\epsilon(h, z) S_+(h) dh$$

Itéré de Bremmer n°1

On part de la définition de $\mathbf{V}^{(1)}$, soit :

$$\forall 0 \leq z \leq z_{max}, V_+^{(1)}(z) = \left(K_{11}^\epsilon V_+^{(0)} \right) (z), V_-^{(1)}(z) = \left(K_{21}^\epsilon V_+^{(0)} \right) (z)$$

où on rappelle que :

$$K_{11}^\epsilon = (1 - \epsilon) G_+^\epsilon T_0 \text{ et } K_{21}^\epsilon = G_-^\epsilon R_0.$$

Considérons d'abord l'itéré de descente $V_+^{(1)}$. D'une part, on a, en vertu de la propriété (3.7) :

$$\left(T_0 V_+^{(0)} \right) (z) = 0 \text{ pour tout } z \in [0, z_1 - \delta/2].$$

On déduit de la représentation (3.8) que :

$$V_+^{(1)}(z) = 0 \text{ pour } 0 \leq z \leq z_1 - \delta/2$$

ce qui entraîne, si $z \in [z_1 - \delta/2 \leq z \leq z_1 + \delta/2]$ (qui correspond à la première couche hétérogène)

$$V_+^{(1)}(z) = (1 - \epsilon) \int_{z_1 - \delta/2}^z G_+^\epsilon(h, z) (T_0 V_+^{(0)})(h) dh$$

Ensuite toujours grâce à (3.7), on a :

$$(T_0 V_+^{(0)})(z) = 0 \text{ pour tout } z \in [z_1 + \delta/2, z_2 - \delta/2]$$

ce qui implique, en utilisant (3.8), que

$$V_+^{(1)}(z) = (1 - \epsilon) \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) (T_0 V_+^{(0)})(h) dh$$

pour tout z dans la couche homogène $[z_1 + \delta/2, z_2 - \delta/2]$.

A présent, si z est dans la couche mince hétérogène $[z_2 - \delta/2 \leq z \leq z_2 + \delta/2]$, on a :

$$\begin{aligned} V_+^{(1)}(z) &= (1 - \epsilon) \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) (T_0 V_+^{(0)})(h) dh \\ &+ (1 - \epsilon) \int_{z_2 - \delta/2}^z G_+^\epsilon(h, z) (T_0 V_+^{(0)})(h) dh \end{aligned}$$

et dans la couche homogène $\{z \geq z_2 + \delta/2\}$

$$\begin{aligned} V_+^{(1)}(z) &= (1 - \epsilon) \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) (T_0 V_+^{(0)})(h) dh \\ &+ (1 - \epsilon) \int_{z_2 - \delta/2}^{z_2 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) (T_0 V_+^{(0)})(h) dh \end{aligned}$$

Si on choisit $\epsilon = 0$, l'itéré $V_+^{(1)}$ corrige $V_+^{(0)}$ dans lequel on ne tenait compte que de la propagation one-way de la source, du haut vers le bas. L'itéré $V_+^{(1)}$ améliore donc le calcul en ajoutant l'effet de la transmission à chaque interface.

Par contre, pour $\epsilon = 1$, $V_+^{(1)}$ est nul. En fait, la transmission est prise en compte dans le propagateur G_+^1 et $V_+^{(0)}$ contient les effets de la transmission aux interfaces. Considérons maintenant l'itéré de remontée. On a, d'après (3.9),

$$V_-^{(1)}(z) = \int_{z_{max}}^z G_-^\epsilon(h, z) (R_0 V_+^{(0)})(h) dh = - \int_z^{z_{max}} G_-^\epsilon(h, z) (R_0 V_+^{(0)})(h) dh.$$

D'après (3.7), on a :

$$V_-^{(1)}(z) = 0 \text{ pour } z_{max} \geq z \geq z_2 + \delta/2.$$

En appliquant le même raisonnement que pour la descente, on obtient :

$$V_-^{(1)}(z) = - \int_z^{z_2+\delta/2} G_-^\epsilon(h, z)(R_0V_+^{(0)})(h)dh \text{ pour } z \in [z_2 - \delta/2, z_2 + \delta/2],$$

$$V_-^{(1)}(z) = - \int_{z_2-\delta/2}^{z_2+\delta/2} G_-^\epsilon(h, z)R_0V_+^{(0)}(h)dh \text{ pour } z \in [z_1 + \delta/2, z_2 - \delta/2],$$

$$\begin{aligned} V_-^{(1)}(z) &= - \int_{z_2-\delta/2}^{z_2+\delta/2} G_-^\epsilon(h, z)(R_0V_+^{(0)})(h)dh \\ &\quad - \int_z^{z_1+\delta/2} G_-^\epsilon(h, z)(R_0V_+^{(0)})(h)dh \text{ pour } z \in [z_1 - \delta/2, z_1 + \delta/2], \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} V_-^{(1)}(z) &= - \int_{z_2-\delta/2}^{z_2+\delta/2} G_-^\epsilon(h, z)(R_0V_+^{(0)})(h)dh \\ &\quad - \int_{z_1-\delta/2}^{z_1+\delta/2} G_-^\epsilon(h, z)(R_0V_+^{(0)})(h)dh \text{ pour } z \in [0, z_1 - \delta/2]. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\epsilon = 0$, l'opérateur G^0 est associé à la propagation pure. La composante $V_-^{(1)}$ s'obtient donc en propageant la partie réfléchie à chaque interface de l'itéré $V_+^{(0)}$.

Itéré de Bremmer n°2

L'itéré $\mathbf{V}^{(2)}$ est construit selon le même schéma que l'itéré $\mathbf{V}^{(1)}$:

$$\begin{cases} V_+^{(2)} = K_{11}^\epsilon V_+^{(1)} + K_{12}^\epsilon V_-^{(1)} \\ V_-^{(2)} = K_{21}^\epsilon V_+^{(1)} + K_{22}^\epsilon V_-^{(1)}. \end{cases}$$

La composante $V_+^{(2)}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall 0 \leq z \leq z_{max}, V_+^{(2)}(z) = \int_0^z G_+^\epsilon(h, z)((1 - \epsilon)(T_0V_+^{(1)})(h) + (R_0V_-^{(1)})(h))dh.$$

Dans la première couche, on a vu que $\sigma(T_0) = \sigma(R_0) = 0$. On en déduit donc que

$$\forall 0 \leq z \leq z_1 - \delta/2, V_+^{(2)}(z) = 0.$$

Ensuite, en suivant les mêmes raisonnements que pour construire $V_+^{(1)}$, on obtient les expressions suivantes :

pour $z_1 - \delta/2 \leq z \leq z_1 + \delta/2$

$$V_+^{(2)}(z) = \int_{z_1 - \delta/2}^z G_+^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_+^{(1)})(h) + (R_0 V_-^{(1)})(h) \right) dh,$$

pour $z_1 + \delta/2 \leq z \leq z_2 - \delta/2$

$$V_+^{(2)}(z) = \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_+^{(1)})(h) + (R_0 V_-^{(1)})(h) \right) dh,$$

pour $z_2 - \delta/2 \leq z \leq z_2 + \delta/2$

$$\begin{aligned} V_+^{(2)}(z) &= \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_+^{(1)})(h) + (R_0 V_-^{(1)})(h) \right) dh \\ &+ \int_{z_2 - \delta/2}^z G_+^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_+^{(1)})(h) + (R_0 V_-^{(1)})(h) \right) dh, \end{aligned}$$

et pour $z \geq z_2 + \delta/2$

$$\begin{aligned} V_+^{(2)}(z) &= \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) (R_0 V_-^{(1)})(h) dh \\ &+ \int_{z_2 - \delta/2}^{z_2 + \delta/2} G_+^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_+^{(1)})(h) + (R_0 V_-^{(1)})(h) \right) dh. \end{aligned}$$

Les formules exprimant $V_+^{(2)}$ dans les différentes couches sont plus compliquées que celles donnant $V_+^{(1)}$ car $V_-^{(1)}$ est non nul. Pour la première fois, l'itéré descendant est exprimé comme une combinaison des itérés descendant ($V_+^{(1)}$) et montant ($V_-^{(1)}$).

En ce qui concerne la remontée, on a, de la même façon que pour $V_-^{(1)}$, la formule globale :

$$\forall 0 \leq z \leq z_{max}, V_-^{(2)}(z) = - \int_z^{z_{max}} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh$$

qui se décompose à l'intérieur de chaque couche en :

si $z_{max} \geq z \geq z_2 + \delta/2$

$$V_-^{(2)}(z) = 0,$$

si $z_2 + \delta/2 \geq z \geq z_2 - \delta/2$

$$V_-^{(2)}(z) = - \int_z^{z_2 + \delta/2} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh,$$

si $z_2 - \delta/2 \geq z \geq z_1 + \delta/2$

$$V_-^{(2)}(z) = - \int_{z_2 - \delta/2}^{z_2 + \delta/2} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh,$$

si $z_1 + \delta/2 \geq z \geq z_1 - \delta/2$

$$\begin{aligned} V_-^{(2)}(z) = & - \int_{z_2 - \delta/2}^{z_2 + \delta/2} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh \\ & - \int_z^{z_1 + \delta/2} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh, \end{aligned}$$

et si $z_1 + \delta/2 \geq z \geq 0$

$$\begin{aligned} V_-^{(2)}(z) = & - \int_{z_2 - \delta/2}^{z_2 + \delta/2} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh \\ & - \int_{z_1 - \delta/2}^{z_1 + \delta/2} G_-^\epsilon(h, z) \left((1 - \epsilon)(T_0 V_-^{(1)})(h) + (R_0 V_+^{(1)})(h) \right) dh. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\epsilon = 1$, l'itéré $V_-^{(2)}$ est nul car il s'exprime uniquement à partir de $V_+^{(1)}$ qui, lui-même, est nul.

On peut exprimer les itérés $V_+^{(j)}$ et $V_-^{(j)}$ avec $j \geq 3$ exactement de la même façon que dans le cas $j = 2$ en remplaçant l'exposant (2) par (j) et l'exposant (1) par (j - 1) dans les formules concernant l'itéré n°2.

On a pu observer que dans le cas où $\epsilon = 1$, on doit effectuer deux fois moins d'opérations que dans le cas où $\epsilon = 0$. Si on ne considère que les aspects liés au coût de la méthode de calcul, le choix $\epsilon = 1$ semble donc plus judicieux. Par contre, il n'est pas clair que la solution d'un modèle soit plus précise que celle de l'autre. Nous reviendrons sur le premier point au paragraphe suivant où on considère le cas discrétisé. Le second point sera discuté au chapitre 6.

3.2.2 Cas discrétisé

On note Δz le pas de discrétisation en profondeur. En pratique, on choisit $\Delta z = \delta$ où δ est l'épaisseur de la couche à l'intérieur de laquelle la vitesse passe continûment d'une valeur constante à une autre. Chacune des intégrales intervenant dans les expressions des itérés est approchée par la méthode des rectangles et choisir $\Delta z = \delta$ va entraîner que les intégrales par rapport à z seront remplacées, au niveau discret, par une multiplication par Δz .

Dans le cas considéré, les géophones sont localisés en surface. Le champ enregistré est donc donné par $V_-(0)$. Celui-ci est donné par un développement en série de Bremmer et on tronque le développement au-delà du 3^{ème} itéré. Le champ approché enregistré est donc donné par :

$$V_{-,app}(0) = V_-^{(0)}(0) + V_-^{(1)}(0) + V_-^{(2)}(0) + V_-^{(3)}(0)$$

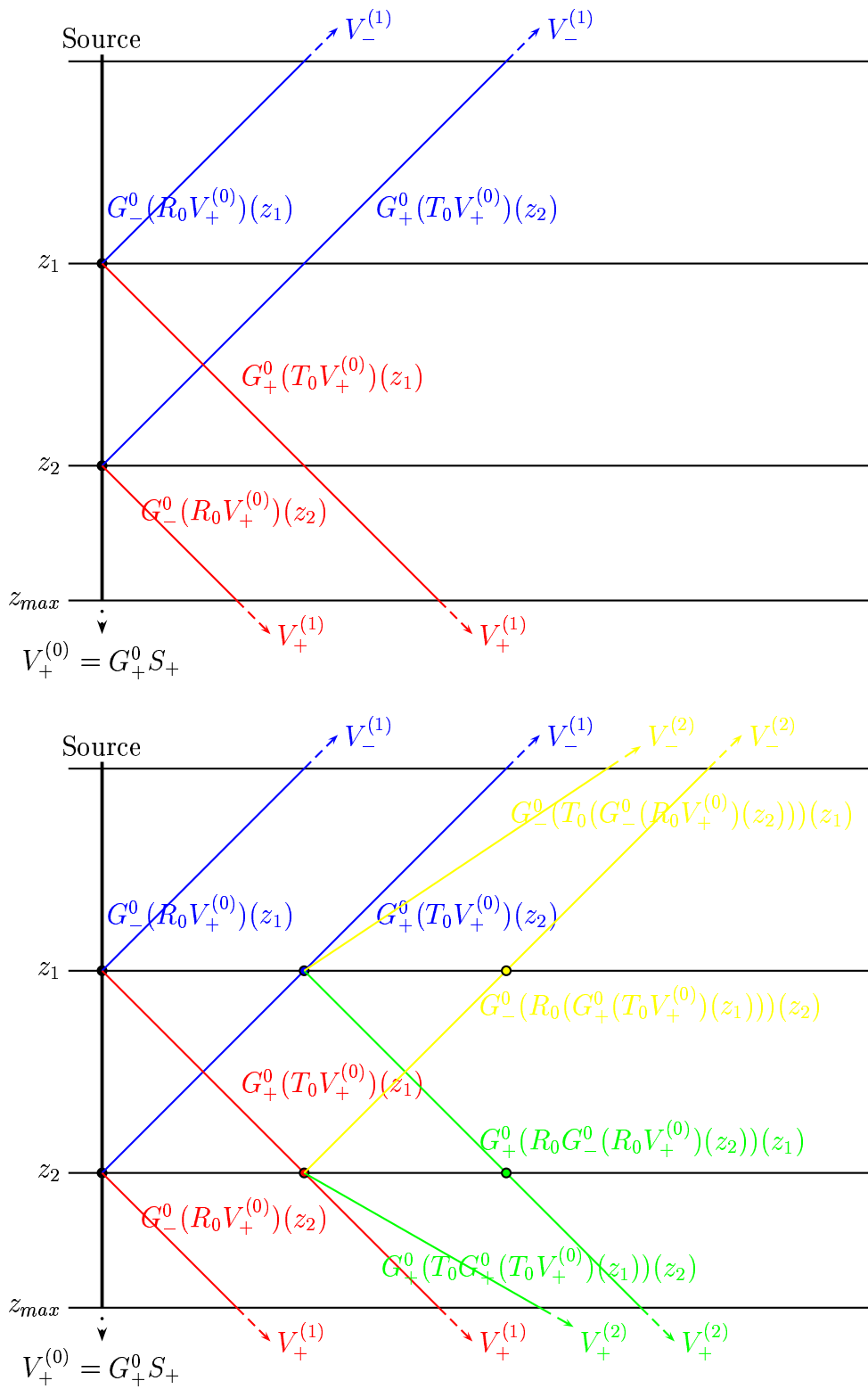


FIG. 3.2 – Itérés de Bremmer

avec

$$\begin{aligned}
V_-^{(0)}(0) &= 0, \\
V_-^{(1)}(0) &= -\Delta z \left(G_-^\epsilon(z_2, 0) R_0 V_+^{(0)}(z_2) + G_-^\epsilon(z_1, 0) R_0 V_+^{(0)}(z_1) \right), \\
V_-^{(2)}(0) &= -\Delta z \left(G_-^\epsilon(z_2, 0) R_0 V_+^{(1)}(z_2) + (1 - \epsilon) G_-^\epsilon(z_1, 0) T_0 V_-^{(1)}(z_1) \right), \\
V_-^{(3)}(0) &= -\Delta z \left(G_-^\epsilon(z_2, 0) R_0 V_+^{(2)}(z_2) + (1 - \epsilon) G_-^\epsilon(z_1, 0) T_0 V_-^{(2)}(z_1) \right).
\end{aligned}$$

Les itérés s'obtiennent tous selon le même schéma. Nous nous limitons à expliquer $V_-^{(1)}$ à une profondeur arbitraire z . Toutefois, le schéma représenté à la Fig. 3.2 donne un aperçu de la contribution de chacun des itérés.

Si on suppose que l'opérateur $G_\pm^\epsilon(\cdot, \cdot)$ vérifie la relation de Chasles :

$$G_\pm^\epsilon(z, h) G_\pm^\epsilon(h, z^*) = G_\pm^\epsilon(z, z^*) = G_\pm^\epsilon(h, z^*) G_\pm^\epsilon(z, h), \quad (3.10)$$

on peut exprimer l'itéré approché en fonction de la source :

$$\begin{aligned}
V_{-,app}(0) &= \underbrace{-\Delta z \left(G_-^\epsilon(z_1, 0) R_0 G_+^\epsilon(0, z_1) S_+ \right)}_{\text{réflexion à la première interface}} \\
&- \underbrace{\Delta z \left(G_-^\epsilon(z_1, 0) (Id - \Delta z(1 - \epsilon) T_0) G_-^\epsilon(z_2, z_1) R_0 G_+^\epsilon(z_1, z_2) (Id + \Delta z(1 - \epsilon)) T_0 G_+^\epsilon(0, z_1) S_+ \right)}_{\text{réflexion à la deuxième interface}} \\
&+ \underbrace{(\Delta z)^3 G_-^\epsilon(z_2, 0) R_0 G_+^\epsilon(z_1, z_2) R_0 G_-^\epsilon(z_2, z_1) R_0 G_+^\epsilon(0, z_2) S_+}_{\text{1er multiple}}
\end{aligned}$$

Pour le géophysicien, les deux premiers termes sont les plus importants. Toutefois, le calcul des multiples est aussi très intéressant car ils peuvent être de forte amplitude et un calcul simultané avec les deux premiers événements peut donner des résultats pollués et difficiles à interpréter correctement. Disposer de leur expression est utile pour ensuite les éliminer avant interprétation des résultats. Elle fait intervenir au moins trois fois l'opérateur de réflexion. En fait, le $m^{\text{ième}}$ multiple s'exprime à partir de R_0 composé au moins $2m + 1$ fois.

Afin d'expliquer la formule donnant $V_{-,app}(0)$, nous nous limitons à décrire le calcul de $V_-^{(1)}(z)$ à une profondeur arbitraire z . Les autres itérés s'obtiennent de la même façon. Avant discrétisation, $V_-^{(1)}(z)$ est donnée par :

$$V_-^{(1)}(z) = \int_{z_{max}}^z G_-^\epsilon(h, z) (R_0 V_+^{(0)}(h)) dh.$$

On rappelle que l'on a la relation de Chasles (3.10) :

$$\forall z^* \in [z, z_{max}], G_-^\epsilon(h, z) = G_-^\epsilon(z^*, z) G_-^\epsilon(h, z^*)$$

ce qui entraîne

$$V_-^{(1)}(z) = G_-^\epsilon(z^*, z) \int_{z_{max}}^{z^*} G_-^\epsilon(h, z^*) (R_0 V_+^{(0)}(h)) dh + \int_{z^*}^z G_-^\epsilon(h, z) (R_0 V_+^{(0)}(h)) dh$$

On a donc la relation : pour tout $z^* \in [z, z_{max}]$,

$$V_-^{(1)}(z) = G_-^\epsilon(z^*, z) V_-^{(1)}(z^*) + \int_{z^*}^z G_-^\epsilon(h, z) (R_0 V_+^{(0)}(h)) dh$$

En pratique, on choisit $z^* = z + \Delta z$. D'où, si $V_-^{(1)}(z)$ désigne encore la valeur discrète de $V_-^{(1)}$, on a, en approchant la seconde intégrale par une méthode des rectangles,

$$V_-^{(1)}(z) = G_-^\epsilon(z + \Delta z, z) V_-^{(1)}(z + \Delta z) - \Delta z G_-^\epsilon(z + \Delta z, z) (R_0 V_+^{(0)}(z + \Delta z))$$

Si l'on reprend la présentation des calculs à réaliser donnée au paragraphe précédent, on pourrait penser que, même si $\epsilon = 0$, chaque itéré est construit au terme de deux phases successives de descente et remontée. En fait, les itérés $V_-^{(j)}$ et $V_+^{(j-1)}$, où j est fixé, se construisent presque simultanément. Par exemple, considérons l'expression de $V_-^{(1)}$ lorsque $\epsilon = 0$. Elle fait intervenir les valeurs de $V_+^{(0)}$ aux deux interfaces, *via* l'opérateur de réflexion. Aussi, quand on calcule $V_+^{(0)}$ en chaque valeur discrète de la profondeur, on stocke aussi les valeurs approchées de $R_0 V_+^{(0)}$. On peut aussi remarquer que, comme ici $R_0 = -T_0$, les valeurs stockées donnent aussi l'expression de $T_0 V_+^{(0)}$ qui interviennent dans $V_+^{(1)}$ et donc dans $V_-^{(2)}$. En arrangeant correctement les calculs, on doit pouvoir optimiser leur nombre et réduire ainsi la complexité de la méthode.

3.3 Organigramme du programme

Le programme est codé en Fortran 90. Il a été développé à partir d'un code C écrit en 2D par Jérôme Le Rousseau. Il fonctionne en 2D comme en 3D. Son architecture a été modifiée. Chaque routine est désormais un module à part entière. Elle peut donc être remplacée par une autre, obtenue par une méthode de calcul différente. Cette propriété sera illustrée au chapitre 6. Le développement en série de Bremmer a aussi été optimisé dans le cas où $\epsilon = 0$, selon une démarche décrite dans ce paragraphe. L'organigramme du code est représenté à la page 63. Les noms en italique correspondent aux noms des routines appelées dans le programme.

On peut résoudre les deux modèles correspondant à $\epsilon = 0$ et $\epsilon = 1$. Dans les deux cas, on débute le programme de la même façon, par les deux routines suivantes.

Entrée des données

On construit la donnée \mathbf{F} en faisant une FFT (Fast Fourier Transform) en temps de la source q . On obtient un tableau en fonction de la fréquence ω . La source q

étant du type Ricker, sa transformée de Laplace tend vers 0 très rapidement. Aussi définit-on une fenêtre de calcul sur l'intervalle $[0, \omega_{max}]$. On fera ainsi une boucle sur les fréquences, ω variant de 0 à ω_{max} . On finit la saisie des données en indiquant le nombre de multiples N que l'on veut simuler. La valeur de N signifie que l'on devra calculer des expressions comprenant R_0 composé par lui-même $2N + 1$ fois, ce qui requiert le calcul de $V_-^{(j)}$ jusqu'à $j = 2N + 1$. La boucle se fera plutôt sur m variant de 0 à N que sur j .

Décomposition de F

On choisit la matrice de vecteurs propres \mathcal{P}_0 qui définit l'opérateur P_0 . On en déduit l'opérateur Q_0 à partir de son symbole principal \mathcal{P}_0^{-1} et on peut calculer $S = Q_0 F$. On peut aussi représenter Q_0 de façon plus précise à partir des formules données au lemme 2.5 du chapitre 2. Nous n'avons pas envisagé ce cas.

On distingue les cas $\epsilon = 0$ et $\epsilon = 1$, et commençons par le plus simple.

Pour chaque ω variant de 0 à ω_{max} , on a :

- (i) $\epsilon = 1$

Calcul des itérés de Bremmer

On va faire une boucle sur le numéro de l'itéré. On a vu que dans le cas particulier où $\epsilon = 1$, $V_+^{(2j+1)} = 0$ et $V_-^{(2j)} = 0$. On ne doit donc calculer qu'un seul itéré à chaque étape de descente et de remontée. On choisit un pas de discrétisation Δz en fonction du profil de vitesse, lequel détermine aussi la profondeur z_{max} .

On fait varier m de 0 à N et on calcule $V_+^{(2m)}$ et $V_-^{(2m+1)}$ à chaque profondeur $l\Delta z$ où l varie de 0 à l_{max} avec $z_{max} = l_{max}\Delta z$. Cela se résume par :

Initialisation

pour l variant de 1 à l_{max}

$$\text{calculer } V_+^{(0)}(l\Delta z) = G_+^1(S_+((l-1)\Delta z))$$

$$\text{stocker } R_0 V_+^{(0)}$$

fin de la boucle en l

pour l variant de $l_{max} - 1$ à 0

$$\text{calculer } V_-^{(1)}(l\Delta z) = G_-^1\left(R_0 V_+^{(0)}((l+1)\Delta z)\right)$$

$$\text{stocker } R_0 V_-^{(1)}$$

fin de la boucle en l

pour m variant de 1 à N ,

pour l variant de 1 à l_{max}

$$\text{calculer } V_+^{(2m)}(l\Delta z) = G_+^1\left(R_0 V_-^{(2m-1)}((l-1)\Delta z)\right)$$

$$\text{stocker } R_0 V_+^{(2m)}$$

fin de la boucle en l

pour l variant de $l_{max} - 1$ à 0

$$\text{calculer } V_-^{(2m+1)}(l\Delta z) = G_-^1\left(R_0 V_+^{(2m)}((l+1)\Delta z)\right)$$

- stocker $R_0V_-^{(2m+1)}$
fin de la boucle en l
On stocke les résultats obtenus pour $V_-^{(2m+1)}(0)$ dans un tableau $RESULT := RESULT(\mathbf{x}', m, \omega)$.
fin de la boucle en m
- (ii) $\epsilon = 0$ Le cas $\epsilon = 0$ est *a priori* le plus lourd à gérer car les itérés descendant et montant restent couplés. Toutefois, on peut optimiser l'algorithme qui avait été utilisé par J. Le Rousseau en reconstruisant les champs *via* un procédé de sommation permettant le calcul des itérés $2j$ et $2j + 1$ en même temps. On minimise ainsi le temps de calcul dans le cas $\epsilon = 0$.

Calcul des itérés de Bremmer

On note toujours j l'indice de sommation dans la série de Bremmer. On utilise comme variable tampon le tableau $TAMP := TAMP(\mathbf{x}')$ et on utilise comme tableaux de stockage les tableaux TAB_+ et TAB_- qui sont de longueur l_{max} , soit $TAB_{\pm} = TAB_{\pm}(l, \mathbf{x}')$.

Pour m variant de 0 à N

Initialisation descente

$TAMP := 0$

$TAB_-(0) := 0$

Pour $l = 1$ à l_{max} ,

Si $m = 0$, $TAB_+(l-1) := 0$

$TAMP := G_+^0((l-1)\Delta z, l\Delta z)(TAMP - TAB_-(l-1) + TAB_+(l-1))$

$TAB_-(l) := -\Delta z R_0 TAMP$

Fin de la première boucle sur l

Initialisation remontée

$TAMP := 0$

$TAB_+(l_{max}) := 0$

Pour $l = l_{max}$ à 1,

$TAB_+(l) := \Delta z R_0 TAMP$

$TAMP := G_-^0(l\Delta z, (l-1)\Delta z)(TAMP - TAB_+)$

Fin de la deuxième boucle sur l

On stocke la variable $TAMP$ qui donne le $m^{\text{ième}}$ multiple en $l = 0$ dans un tableau $RESULT := RESULT(\mathbf{x}', m, \omega)$.

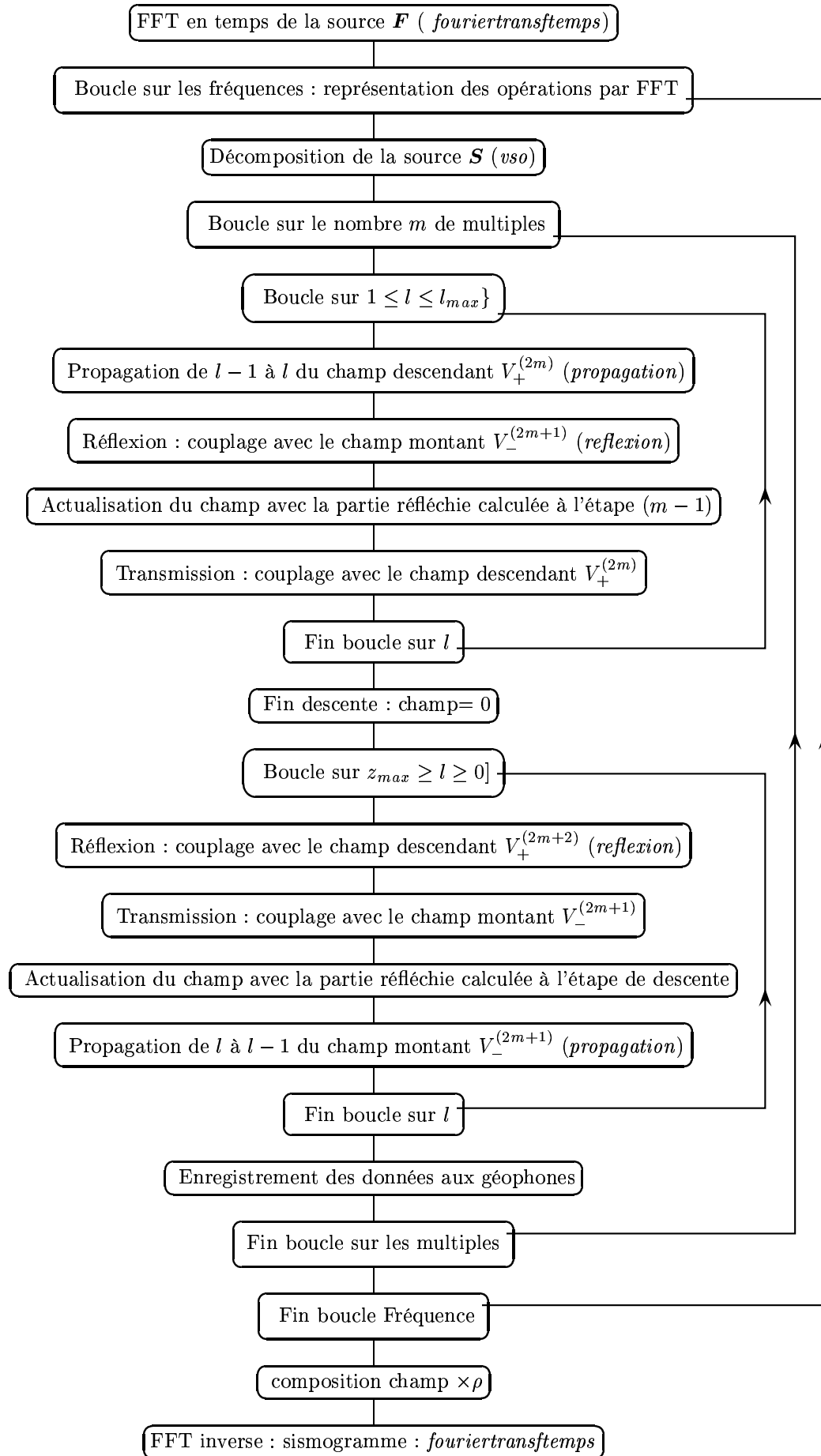
Fin boucle sur m

Composition

On a ainsi obtenu un tableau contenant les champs enregistrés en $z = 0$ pour chaque m et pour toutes les fréquences de 0 à ω_{max} . On applique alors l'opérateur P_0 à ce champ pour retrouver l'inconnue \mathbf{U} . Dans notre cas, on ne considère que la première composante de \mathbf{U} qui, après transformée de Laplace inverse, nous donne la pression acoustique. En représentant la pression acoustique en surface ($z = 0$) en fonction du temps, on obtient le sismogramme avec en abscisse la position \mathbf{x}' en

surface, en ordonnée le temps t orienté vers le bas, et on utilise une échelle de gris (allant du noir au blanc) pour représenter la valeur de la pression acoustique au point (\mathbf{x}', t) .

Remarque 7. Pour représenter des snapshots (valeur du champ d'onde en tout point (\mathbf{x}', z, t)), on devra considérer une variable $TAMP$ de dimension supérieure, soit $TAMP := TAMP(\mathbf{x}', l, \omega)$. On pourra stocker le champ en tout point (\mathbf{x}', z, ω) , et on fera une transformée de Fourier inverse par rapport à ω pour obtenir un champ en tout point (\mathbf{x}', z, t) .



3.4 Présentation des cas test

3.4.1 Modèle GXT

Il s'agit d'un modèle 2D dont le profil de vitesse est représenté à la figure 3.3. Nous l'avons considéré car il correspond de façon très proche au résultat d'une campagne d'acquisition sous-marine. Il comprend deux dômes de sel qui sont des milieux associés à de fortes vitesses de propagation. Le modèle est donc un très bon candidat pour tester les capacités de la méthode GSP.

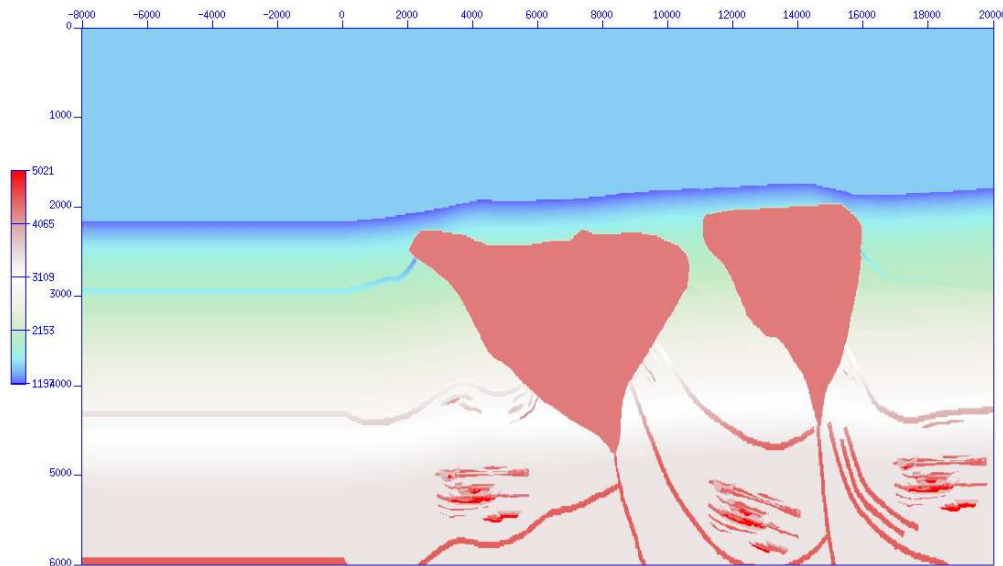


FIG. 3.3 – *Modèle de vitesse GXT.*

Les paramètres géographiques du modèles sont les suivants :

profondeur	6 km
largeur	20 km

Les vitesses de propagation sont situées dans l'échelle :

vitesse minimale (sédiments)	1190 ms ⁻¹
vitesse maximale (dôme de sel)	5021 ms ⁻¹

Les caractéristiques liées au calcul sont les suivantes :

largeur réelle du domaine de calcul	28 km 05
pas Δx	5 m
pas Δz	5 m

3.4.2 Modèles bi-couches

Nous avons considéré deux modèles bi-couches. Le premier est un modèle 2D (Figure 3.4) avec une interface horizontale à la profondeur de 2500 m.

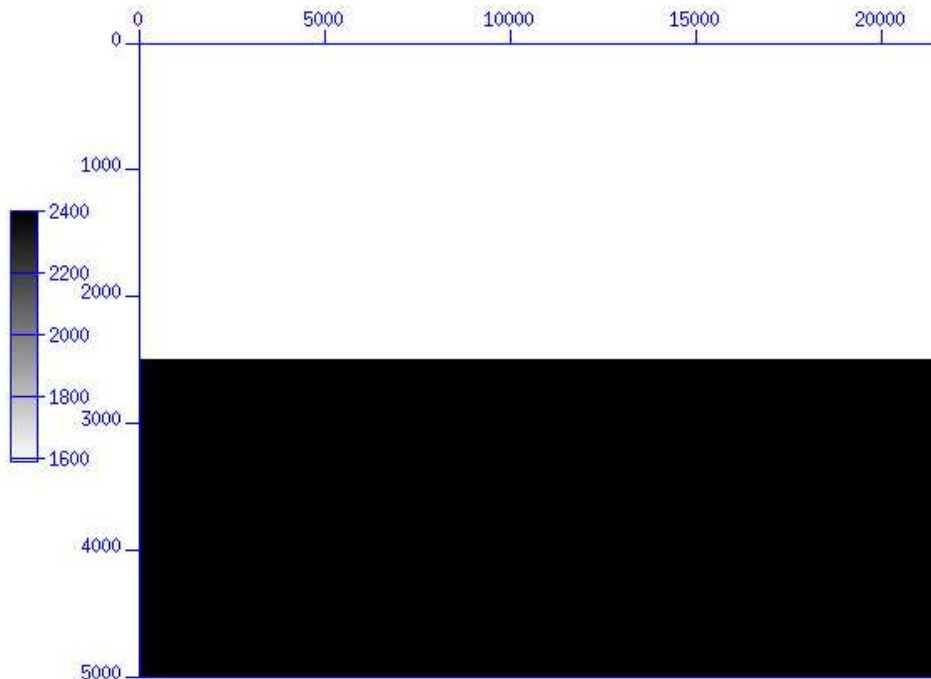


FIG. 3.4 – *Modèle interface horizontale.*

Dans la couche supérieure, la vitesse est de 1600 ms^{-1} et dans la couche inférieure, elle est de 2400 ms^{-1} . Les données géographiques du modèle sont :

profondeur	5 km
largeur	21.59 km

La largeur est due au fait que l'on a choisi un nombre de points en x de telle sorte qu'il soit un produit de puissance de 2, 3 et 5. C'est la forme que doit avoir ce nombre de point pour les FFT, ce qui évite de rajouter des points.

Pour le calcul, on considère :

largeur réelle du domaine de calcul	21.59 km
pas Δx	10 m
pas Δz	10 m

Le second modèle (Figure 3.5) est encore un modèle 2D où l'interface fait un angle $\alpha \neq 0$ avec l'horizontale. Les caractéristiques géographiques et les paramètres pour le calcul sont les mêmes que pour le premier modèle.

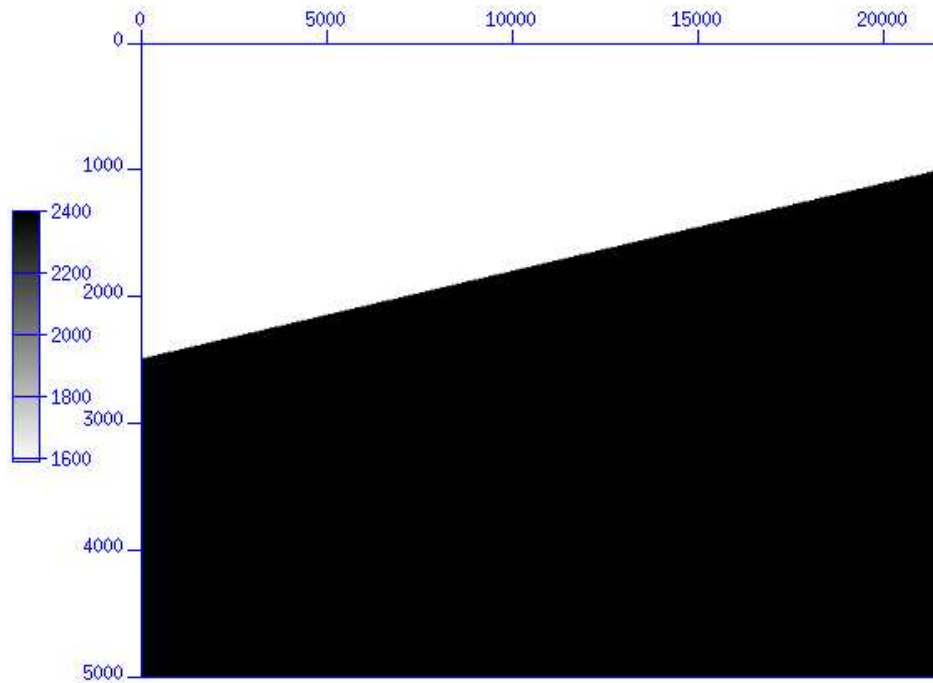


FIG. 3.5 – *Modèle interface pentée.*

3.4.3 Modèle à trois couches

Ce modèle (Figure 3.6) va nous servir pour montrer les multiples. Il est composé de deux interfaces horizontales situées à 1500 m et 2500 m de profondeur. Les vitesses de propagations sont de 3000 ms^{-1} pour la première couche (celle en dessous de la surface), 1600 ms^{-1} pour la suivante et 4000 ms^{-1} pour la dernière. Les caractéristiques géographiques sont comme précédemment :

profondeur	5 km
largeur	21.59 km

et les paramètres pour le calcul sont les suivants :

largeur réelle du domaine de calcul	21.59 km
pas Δx	10 m
pas Δz	10 m

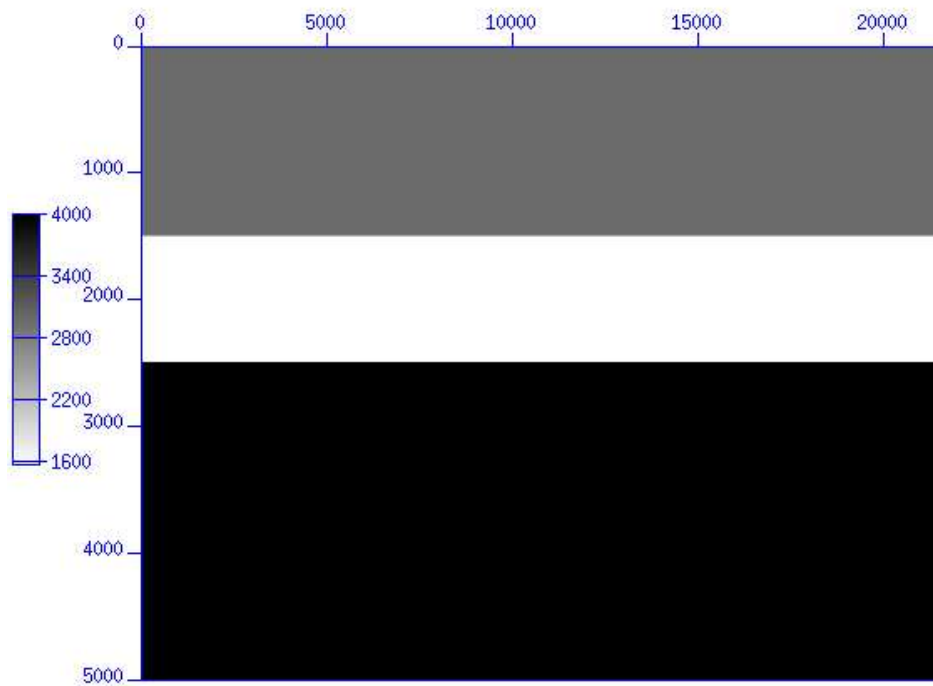


FIG. 3.6 – *Modèle 3 couches.*

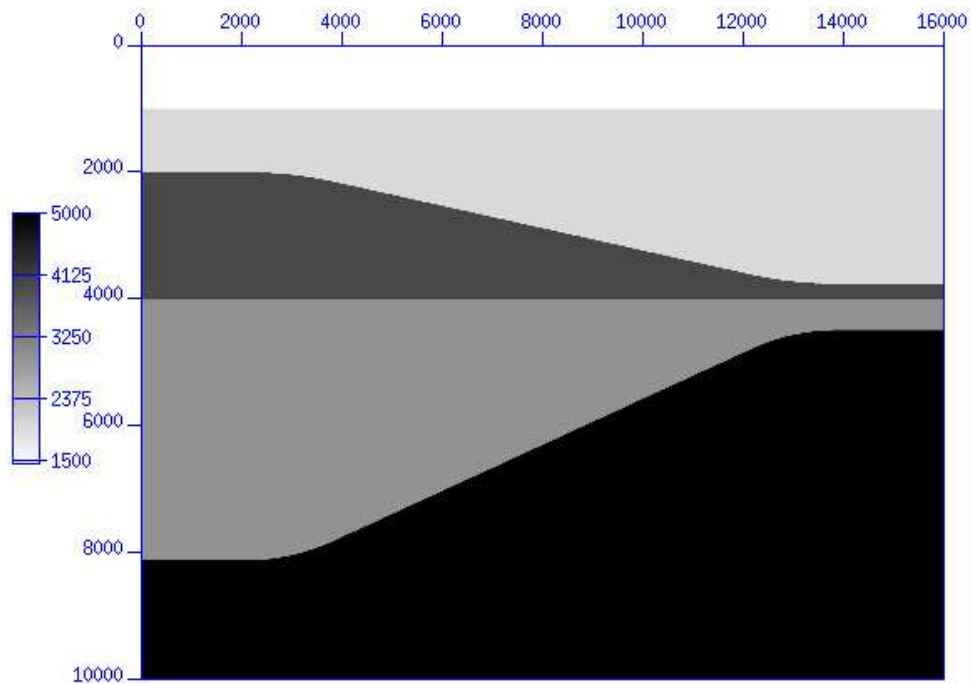
3.4.4 Modèle à cinq couches

C'est un modèle 2D (Figure 3.7) qui comporte quatre interfaces dont deux sont pentées.

Le domaine de calcul est défini par :

profondeur	10 km
largeur	16 km

et pour les calculs, les paramètres sont donnés par :

FIG. 3.7 – *Modèle à cinq couches.*

largeur réelle du domaine de calcul	16 km
pas Δx	5 m
pas Δz	5 m

3.4.5 Modèle 3D

Nous considérons un modèle de vitesse 3D avec une interface horizontale. Dans la couche supérieure, la vitesse est de 1600 ms^{-1} et dans la couche inférieure, elle est de 2400 ms^{-1} . Les données géographiques du modèle sont :

profondeur (z)	6 km
longueur (x)	6 km
largeur (y)	6 km

Pour le calcul, on considère :

longueur (x) réelle du domaine de calcul	6 km
largeur (y) réelle du domaine de calcul	6 km
pas Δx	20 m
pas Δy	20 m
pas Δz	20 m

L'interface est située à une profondeur de 2000 m. Le point de tir est situé au point $(x = 3000, y = 3000, z = 0)$.

Chapitre 4

Generalized Screen Propagator

Dans ce chapitre, on présente les étapes essentielles de la méthode du GSP, à l'exception de l'opérateur de réflexion qui fait l'objet de développements spécifiques regroupés dans le chapitre suivant.

Au premier paragraphe, on présente l'opérateur de propagation. On décrit ensuite rapidement l'opérateur de décomposition.

On finit le chapitre en proposant une discrétisation de la propagation à partir d'un schéma implicite.

4.1 Opérateur de propagation

Au chapitre précédent, on a introduit l'opérateur de propagation G^ϵ et on a émis quelques hypothèses qui ont permis d'élaborer un algorithme de résolution. Le but de ce paragraphe est de donner plus d'informations sur l'opérateur G^ϵ et plus particulièrement de construire un opérateur approché pour les calculs numériques.

4.1.1 L'opérateur exact

L'opérateur G^ϵ est défini comme l'inverse de l'opérateur diagonal $(\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \epsilon I_2 T_0)$ avec $\epsilon \in \{0, 1\}$. Il s'écrit sous la forme

$$G^\epsilon = \begin{pmatrix} G_+^\epsilon & 0 \\ 0 & G_-^\epsilon \end{pmatrix}$$

où les opérateurs $G_\pm^\epsilon = (\partial_z \pm i\omega\Gamma_0 - \epsilon T_0)^{-1}$ sont des opérateurs de propagation scalaires. On rappelle que $\Gamma_0 \in \text{OPS}^0$ a pour symbole γ_0 et $T_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0$ est l'opérateur de transmission.

D'après M. de Hoop [30], les noyaux de Schwartz élémentaires associés aux opérateurs G_\pm^ϵ sont définis par les fonctions de Green qui sont des solutions causales de :

$$(\partial_z \pm i\omega\Gamma_0 - \epsilon T_0) \mathcal{G}_\pm^\epsilon = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')\delta(z - h).$$

La condition de causalité exprime le comportement de \mathcal{G}_\pm^ϵ à l'infini soit

$$\mathcal{G}_\pm^\epsilon := \mathcal{G}_\pm^\epsilon(\mathbf{x}', z, \mathbf{y}', h) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Les opérateurs G_{\pm}^{ϵ} admettent alors la représentation intégrale : pour toute fonction-test φ_{\pm} ,

$$G_{\pm}^{\epsilon}\varphi_{\pm} = \int_{h \in \mathbb{R}} \int_{\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^2} \mathcal{G}_{\pm}^{\epsilon}(\mathbf{x}', z, \mathbf{y}', h) \varphi_{\pm}(\mathbf{y}', h) d\mathbf{y}' dh. \quad (4.1)$$

et on a :

$$\mathcal{G}_{\pm}^{\epsilon}(\mathbf{x}', z, \mathbf{y}', h) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(G_{\pm}^{\epsilon})(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}', k_z) e^{i(\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{k}'} e^{i(z - h) \cdot k_z} d\mathbf{k}' dk_z$$

On peut calculer le symbole de G_{\pm}^{ϵ} de façon approchée en utilisant le calcul pseudo-différentiel et en exprimant le fait que G_{\pm}^{ϵ} est l'inverse de $(\partial_z \pm i\omega\Gamma_0 - \epsilon T_0)$. Pour les tests numériques, on peut même se contenter de calculer une approximation du symbole de G_{\pm}^{ϵ} . En fait, on a

$$\sigma(\partial_z \pm i\omega\Gamma_0 - \epsilon T_0) = ik_z \left[1 \pm \frac{\omega\gamma_0}{k_z} - \frac{\epsilon\sigma(T_0)}{k_z} \right]$$

et donc une approximation du symbole de G_{\pm}^{ϵ} est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma(G_{\pm}^{\epsilon}) &\simeq \frac{1}{ik_z} \left[1 \mp \frac{\omega\gamma_0}{k_z} + \frac{\epsilon\sigma(T_0)}{k_z} \right] \\ &\simeq \frac{1}{ik_z} e^{\mp \frac{\omega\gamma_0}{k_z} + \frac{\epsilon\sigma(T_0)}{k_z}} \end{aligned}$$

Par ce calcul formel, on devine que G_{\pm}^{ϵ} est défini, au moins de façon approchée, comme la composée d'une intégrale par rapport à la variable z (de symbole $(ik_z)^{-1}$) et de l'exponentielle d'une intégrale par rapport à z de $\mp i\omega\Gamma_0 + \epsilon T_0$. Dans la suite, on va préciser ce résultat formel.

Notons $A_{\pm}^{\epsilon} := A_{\pm}^{\epsilon}(z)$ l'opérateur défini par $A_{\pm}^{\epsilon} = \mp i\omega\Gamma_0 - i\epsilon T_0$. Il s'agit d'un opérateur de OPS¹ dépendant continûment de la variable z . Considérons alors le problème de Cauchy : trouver $W_{\pm} := W_{\pm}(\mathbf{x}', z, \omega, h)$ solution de

$$\begin{cases} (\partial_z - iA_{\pm}^{\epsilon}(z)) W_{\pm} = 0 & \text{pour } \pm z > \pm h \\ W_{\pm}(\mathbf{x}', h, \omega, h) = \varphi_{\pm}(\mathbf{x}', h, \omega) \end{cases} \quad (4.2)$$

On a le résultat suivant :

Proposition 4.1. *Pour φ_{\pm} fonction test régulière,*

$$W_{\pm}(\mathbf{x}', z, \omega, h) = \exp\left(i \int_h^z A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right) \varphi_{\pm}(\mathbf{x}', h, \omega).$$

Démonstration. Le résultat énoncé à la proposition 4.1 est trivial dans le cas où A_{\pm}^{ϵ} ne dépend pas de z , à condition de savoir justifier l'existence de l'exponentielle de izA_{\pm}^{ϵ} . Cela est le cas si A_{\pm}^{ϵ} est auto-adjoint. Dans le cas où A_{\pm}^{ϵ} dépend continûment de z , il est nécessaire de savoir définir l'exponentielle d'une primitive par rapport à z de A_{\pm}^{ϵ} . On peut le faire si cette primitive est un opérateur auto-adjoint, ce qui est le cas si A_{\pm}^{ϵ} est lui-même auto-adjoint.

Ici, A_{\pm}^{ϵ} est un opérateur dépendant continûment de z . Dans la zone hyperbolique \mathcal{H} , on rappelle que γ_0 est réel et ainsi que $\sigma(T_0)$. Comme $\sigma(A_{\pm}^{\epsilon}) = \mp\omega\gamma_0 - i\epsilon\sigma(T_0)$, si on note $(A_{\pm}^{\epsilon})^*$ l'opérateur adjoint de A_{\pm}^{ϵ} , il vient

$$\sigma_P((A_{\pm}^{\epsilon})^*) = \mp\omega\gamma_0 + i\epsilon\sigma(T_0) \text{ dans } \mathcal{H}.$$

On en déduit donc que $\sigma_P(A_{\pm}^{\epsilon} - (A_{\pm}^{\epsilon})^*) = -2i\epsilon\sigma(T_0) \in S^0$. On peut ainsi appliquer un résultat de [67] complétant le résultat rappelé dans la cas où A_{\pm}^{ϵ} est auto-adjoint : comme $A_{\pm}^{\epsilon} - (A_{\pm}^{\epsilon})^* \in OPS^0$, on peut définir l'opérateur intégral de Fourier

$$\exp\left(i \int_h^z A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right)$$

et tout solution du problème de Cauchy (4.2) s'écrit à la profondeur z :

$$W_{\pm}(\mathbf{x}', z, \omega, h) = \exp\left(i \int_h^z A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right) \varphi_{\pm}(\mathbf{x}', h, \omega).$$

■

Dans la suite, on note $G_{\pm}^{\epsilon}(h, z)$ l'opérateur

$$G_{\pm}^{\epsilon}(h, z) = \exp\left(i \int_h^z A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right). \quad (4.3)$$

Cet opérateur peut être vu comme l'opérateur exprimant la propagation de la donnée (source) φ localisée en $z = h$ jusqu'à la profondeur z . Il s'agit d'un opérateur pseudo-différentiel dépendant continûment des paramètres h et z . On peut alors représenter le propagateur G_{\pm}^{ϵ} de la façon suivante :

Proposition 4.2. *Les propagateurs scalaires G_{\pm}^{ϵ} s'expriment en fonction des propagateurs $G_{\pm}^{\epsilon}(\cdot, \cdot)$ définis sur une épaisseur finie par (4.3). On a alors pour toute fonction-test φ_{\pm} régulière,*

$$\begin{cases} G_{+}^{\epsilon}\varphi_{+} \simeq \int_{-\infty}^z G_{+}^{\epsilon}(h, z)\varphi_{+}(h)dh \\ G_{-}^{\epsilon}\varphi_{-} \simeq \int_{+\infty}^z G_{-}^{\epsilon}(h, z)\varphi_{-}(h)dh. \end{cases} \quad (4.4)$$

où le signe \simeq indique que les égalités sont vérifiées modulo des fonctions régulières.

Pour la preuve de ce résultat, nous renvoyons à [67] et au cours de V. Ivrii [50]. On peut aussi consulter l'article de A. Dynin [34] où on propose une construction du propagateur écrit dans la classe des opérateurs de Weyl et basé sur le ω -calcul présenté au chapitre 1.

La proposition 4.2 montre donc que les relations (3.8,3.9) utilisées au chapitre précédent sont effectivement vérifiées. On peut également constater que l'on a la propriété suivante :

Propriété 4.3. Soient $G_{\pm}^{\epsilon}(h, z)$ les opérateurs définis en (4.3), où h et z désignent deux profondeurs quelconques. On a, pour toute profondeur z^* ,

$$G_{\pm}^{\epsilon}(h, z) = G_{\pm}^{\epsilon}(h, z)G_{\pm}^{\epsilon}(z^*, z).$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} G_{\pm}^{\epsilon}(h, z) &= \exp\left(i \int_h^z A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right) \\ &= \exp\left(i \int_h^{z^*} A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right) \exp\left(i \int_{z^*}^z A_{\pm}^{\epsilon}(\zeta) d\zeta\right) \\ &= G_{\pm}^{\epsilon}(h, z^*)G_{\pm}^{\epsilon}(z^*, z) \end{aligned}$$

■

La propriété 4.3 justifie la relation de Chasles utilisée au chapitre 3.

4.1.2 Opérateur approché

On vient de voir que les opérateurs de propagation G_{\pm}^{ϵ} peuvent s'écrire comme une superposition d'opérateurs élémentaires $G_{\pm}^{\epsilon}(h, z)$. L'approximation numérique va donc porter essentiellement sur ces opérateurs élémentaires.

Dans le but de réduire les charges de calcul de la méthode (voir chapitre 1, paragraphe 1.3), on va chercher à séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' dans l'écriture des symboles des opérateurs discrétisés. Par construction de A_{\pm}^{ϵ} , tous les calculs reposent sur le symbole γ_0 . Toutefois, séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' dans γ_0 ne sera pas suffisant, car $G_{\pm}^{\epsilon}(h, z)$ s'exprime comme une exponentielle. On aura donc recours à l'approximation de cette exponentielle, après séparation des variables.

Une façon de séparer \mathbf{x}' et \mathbf{k}' consiste à introduire un milieu de référence dans lequel la vitesse de propagation c_r ne dépend que de z . Dans le milieu de référence, on considère le symbole γ_r , défini de la même façon que γ_0 , soit :

$$\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega) = \sqrt{\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}}.$$

On note $\delta = \delta(\mathbf{x}', z)$ le paramètre exprimant l'écart de lenteur entre le milieu réel et le milieu de référence, soit $\delta(\mathbf{x}', z) = \frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{1}{c(\mathbf{x}', z)^2}$. On a alors :

$$\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \sqrt{\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} - \delta(\mathbf{x}', z)}$$

qu'on récrit sous la forme :

$$\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega) \sqrt{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z)}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^2}}.$$

Comme $u = \frac{\delta(\mathbf{x}', z)}{\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)^2} \ll 1$, on effectue un développement de Taylor de $\sqrt{1-u}$ au voisinage de 0, il vient :

$$\gamma_0^{a,n}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega) + \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \quad (4.5)$$

avec

$$\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\delta(\mathbf{x}', z)^j}{\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)^{2j-1}}$$

où

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad \forall j \geq 2, \quad a_j = -\frac{(2j-3)!}{j!(j-2)!2^{2j-2}}.$$

Le symbole $\gamma_0^{a,n}$ s'exprime alors à partir de fonctions où les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' sont bien séparées.

Dans la suite, on utilisera les notations $z^+ = z + \frac{1}{2}\Delta z$ et $z^- = z - \frac{1}{2}\Delta z$ où Δz désigne le pas de discrétisation en profondeur (cf Fig. 4.1). On notera γ_0^\pm ou γ_r^\pm pour signaler que les symboles γ_0 ou γ_r sont évalués en z^\pm .

On détaille la construction du propagateur approché dans le cas où $\epsilon = 0$.

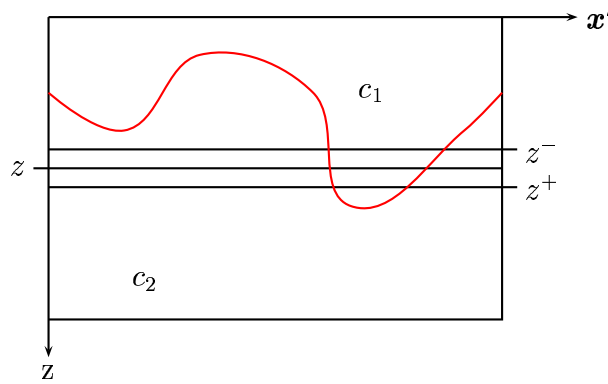


FIG. 4.1 – Profil de vitesse.

On choisit de représenter l'opérateur $G_\pm^\epsilon(\cdot, \cdot)$ par la formule (1.7). On a donc :

$$\mathcal{F}(G_\pm^0(h, z)\varphi_\pm) = \int_{\mathbb{R}^2} \sigma(G_\pm^0(h, z)) e^{-i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \varphi_\pm(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

La construction d'un opérateur approché utilisable pour les simulations numériques avec une charge de calculs raisonnable va reposer sur le calcul d'une approximation de $\sigma(G_\pm^0(h, z))$ qui sera donné par une fonction dans laquelle les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' sont séparées. On commence par approcher le symbole de $G_\pm^0(h, z)$ par son symbole principal :

$$\sigma(G_\pm^0(h, z)) \simeq \sigma_P(G_\pm^0(h, z)).$$

Par définition de $G_{\pm}^0(h, z)$, on a :

$$\sigma_P(G_{\pm}^0(h, z)) = \exp\left(i \int_h^z \sigma_P(A_{\pm}^0(\zeta)) d\zeta\right).$$

Comme $\sigma_P(A_{\pm}^0(\zeta))$ est continue par rapport à ζ , on peut appliquer la première formule de la moyenne : il existe $z_h \in]h, z[$ tel que :

$$\sigma_P(G_{\pm}^0(h, z)) = \exp(i(z-h)\sigma_P(A_{\pm}^0(z_h))).$$

On rappelle que

$$\sigma_P(A_{\pm}^0(z_h)) = \mp\omega\gamma_0(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega)$$

avec $\gamma_0(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega) = \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z_h)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$. Afin de séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' dans l'expression de $\sigma_P(G_{\pm}^0(h, z))$, on propose d'approcher $\gamma_0(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega)$ par la formule (4.5) exprimant $\gamma_0^{a,n}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_P(G_{\pm}^0(h, z)) &\simeq \exp(\mp i\omega(z-h)\gamma_r(z_h, \mathbf{k}'/\omega)) \\ &\times \exp(\mp i\omega(z-h)\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega)). \end{aligned}$$

La première exponentielle ne dépend que de \mathbf{k}' . Par contre, la seconde mélange toujours les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' . On va donc recourir à une deuxième approximation et on impose que la formule approchée résultante soit exacte lorsque $\mathbf{k}' = 0$ (ce qui correspond à une incidence verticale. C'est pourquoi on introduit $\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, 0)$ de façon artificielle en réécrivant $\sigma_P(G_{\pm}^0(h, z))$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_P(G_{\pm}^0(h, z)) &\simeq \exp(\mp i\omega(z-h)\gamma_r(z_h, \mathbf{k}'/\omega)) \\ &\times \exp(\mp i\omega(z-h)\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, 0)) \\ &\times \exp(\mp i\omega(z-h)(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega)). \end{aligned}$$

avec $(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega) = \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, 0)$.

Il s'agit donc de séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' dans la troisième exponentielle. Pour cela, on fait l'hypothèse que $(z-h)\Delta\tilde{\gamma}_0$ est petit. En pratique, on choisit $h = \mp\Delta z$ où Δz désigne le pas de discrétisation en profondeur et Δz est petit. Il suffit donc de supposer que $\Delta\tilde{\gamma}_0$ est borné pour que l'hypothèse soit vérifiée. On développe alors la troisième exponentielle en série de Taylor et en tronquant ce développement au premier ordre, on obtient une approximation de $\sigma_P(G_{\pm}^0(., .))$ de la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_P(G_{\pm}^0(h, z)) &\simeq \exp(\mp i\omega(z-h)\gamma_r(z_h, \mathbf{k}'/\omega)) \\ &\times \exp(\mp i\omega(z-h)\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, 0)) \\ &\times (1 \mp i\omega(z-h)(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dans la suite, on note $g_{\pm}^{0,a}(., .)$ le symbole évalué en (z, h) et donné par la formule (4.6). En posant, pour toute fonction-test φ_{\pm} ,

$$\mathcal{F}(G_{\pm}^{0,a}(h, z)\varphi_{\pm}) = \int_{\mathbb{R}^2} g_{\pm}^{0,a}(h, z)g_{189}e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}'}\varphi_{\pm}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}', \quad (4.7)$$

on définit un opérateur approché de $G_{\pm}^0(., .)$ dont le symbole $g_{\pm}^{0,a}(., .)$ vérifie le lemme suivant.

Lemme 4.4. *Le symbole $g_{\pm}^{0,a}(\cdot, \cdot)$ défini par la formule (4.6) se décompose en une somme de symboles élémentaires à variables séparées :*

$$g_{\pm}^{0,a}(\cdot, \cdot) = g_{\pm}^{0,a,0}(\cdot, \cdot) + \sum_{j=1}^n a_j g_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)$$

avec

$$\begin{aligned} g_{\pm}^{0,a,0}(\cdot, \cdot) &= \exp(\mp i\omega(z-h)\gamma_r(z_h, \mathbf{k}'/\omega)) \\ &\times \exp(\mp i\omega(z-h)\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, 0)) \end{aligned}$$

et pour $1 \leq j \leq n$,

$$g_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot) = \mp i\omega(z-h)g_{\pm}^{0,a,0}(\cdot, \cdot)\delta(\mathbf{x}', z_h)^j \left[\frac{1}{\gamma_r(z_h, \mathbf{k}'/\omega)^{2j-1}} - c_r(z_h)^{2j-1} \right]$$

et les coefficients a_j sont ceux du développement en série entière de $\sqrt{1-X}$.

Démonstration. La preuve du lemme est immédiate : il suffit de remplacer $\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z_h, \mathbf{k}'/\omega)$ par son développement de Taylor tronqué à l'ordre n et donné par la formule 4.5. ■

En appliquant le lemme 4.4, on peut donc, à partir de la formule (4.7) exprimer simplement $G_{\pm}^{0,a}(\cdot, \cdot)$ en effectuant une transformée de Fourier inverse par rapport à la variable \mathbf{k}' . En effet, comme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G_{\pm}^{0,a}(\cdot, \cdot)\varphi_{\pm}) &= \int_{\mathbb{R}^2} g_{\pm}^{0,a,0}(\cdot, \cdot)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}'}\varphi_{\pm}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &+ \sum_{j=1}^n a_j \int_{\mathbb{R}^2} g_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)e^{-i\mathbf{x}'\cdot\mathbf{k}'}\varphi_{\pm}(\mathbf{x}')d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (4.8)$$

et comme pour $0 \leq j \leq 1$,

$$g_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)(\mathbf{x}', \mathbf{k}'/\omega) = h_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)(\mathbf{x}')q_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)(\mathbf{k}'/\omega),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} G_{\pm}^{0,a}(\cdot, \cdot)\varphi_{\pm} &= \mathcal{F}_{\mathbf{k}'}^{-1} [q_{\pm}^{0,a,0}(\cdot, \cdot)\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(h_{\pm}^{0,a,0}(\cdot, \cdot)\varphi_{\pm})] \\ &+ \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{F}_{\mathbf{k}'}^{-1} [q_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(h_{\pm}^{0,a,j}(\cdot, \cdot)\varphi_{\pm})]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

On obtient alors :

Proposition 4.5. *Une approximation de degré n de l'opérateur de propagation G_{\pm}^0 est donnée par la représentation intégrale :*

$$\begin{aligned} G_+^{0,a}\varphi_+ &= \int_{-\infty}^z G_+^{0,a}(h, z)\varphi_+(h)dh, \\ G_-^{0,a}\varphi_- &= \int_{+\infty}^z G_-^{0,a}(h, z)\varphi_-(h)dh, \end{aligned}$$

où les opérateurs $G_{\pm}^{0,a}(\cdot, \cdot)$ sont définis par la formule (4.9).

Hélas, les opérateurs ne sont pas des approximations satisfaisantes des opérateurs exacts. En effet, en chechant à séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' , on a détruit le caractère unitaire de l'opérateur de propagation. Tel qu'il est représenté dans (4.9), l'opérateur approché va donc générer des défauts d'amplitude. C'est pourquoi, on a recours à une correction d'amplitude quand on discrétise $G_{\pm}^{0,a}$.

4.1.3 Opérateur approché discret

On utilise les mêmes notations qu'au paragraphe précédent. On choisit $h = z - \Delta z$ si on effectue une descente (on considère l'opérateur $G_{+}^{0,a}$) et $h = z + \Delta z$ si on effectue une remontée (on utilise l'opérateur $G_{-}^{0,a}$). La quantité Δz désigne, comme au chapitre 3, le pas de discrétisation. On prend $z_h = z$ ce qui revient à remplacer la formule de la moyenne par une méthode des rectangles pour le calcul des intégrales. On a alors :

$$\begin{aligned} G_{\pm}^{0,a}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm} &= \mathcal{F}_{\mathbf{k}'}^{-1} [q_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm})] \\ &+ \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{F}_{\mathbf{k}'}^{-1} [q_{\pm}^{0,a,j}(z \mp \Delta z, z)\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(h_{\pm}^{0,a,j}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm})]. \end{aligned}$$

Ce n'est pas cette représentation qui est effectivement codée car on a déjà noté qu'elle génère des erreurs sur l'amplitude des champs propagés. En pratique, on procède de la façon suivante. On revient à la représentation du type (1.7) de $G_{\pm}^{0,a}$ en considérant cette fois l'opérateur discrétisé. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G_{\pm}^{0,a}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm}) &= q_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\mathcal{F}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm}) \\ &- i\omega\Delta z \sum_{j=1}^n a_j q_{\pm}^{0,a,j}(z \mp \Delta z, z)\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\delta^j(\cdot, z)\varphi_{\pm}) \end{aligned}$$

On factorise l'expression par $q_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\mathcal{F}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G_{\pm}^{0,a}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm}) &= q_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\mathcal{F}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm}) \\ &\times \left(1 - i\omega\Delta z \sum_{j=1}^n a_j \tilde{q}_{\pm}^{0,a,j}(z \mp \Delta z, z) \frac{\mathcal{F}_{\mathbf{x}'}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\delta^j(\cdot, z)\varphi_{\pm})}{\mathcal{F}(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm})} \right) \end{aligned}$$

en notant que $q_{\pm}^{0,a,j} = q_{\pm}^{0,a,0}\tilde{q}_{\pm}^{0,a,j}$.

On représente donc l'opérateur de propagation discret comme le produit d'un opérateur unitaire par un résidu qui, sans correction, va générer des erreurs d'amplitude. En pratique, on calcule ce résidu et on le normalise ensuite en appliquant la fonction de normalisation \mathcal{N} utilisée par J. Le Rousseau dans sa thèse [61]. Cette fonction est définie de la façon suivante. Si $w = Re(w) + iIm(w)$ désigne un nombre complexe,

$$\mathcal{N}(1+w) = e^{iIm(w)} \frac{1 + \frac{Re(w)}{1+iIm(w)}}{\left| 1 + \frac{Re(w)}{1+iIm(w)} \right|}.$$

La construction de \mathcal{N} est assez triviale et repose sur l'approximation au premier ordre de $e^{iIm(w)}$. En effet, en factorisant par $1 + iIm(w)$, on obtient :

$$1 + w = (1 + iIm(w)) \left(1 + \frac{Re(w)}{1 + iIm(w)} \right),$$

$$1 + w \simeq e^{iIm(w)} \left(1 + \frac{Re(w)}{1 + iIm(w)} \right).$$

Remarque 8. On pourrait aussi utiliser d'autres termes du développement de $e^{iIm(w)}$. En notant que :

$$1 + w = 1 + iIm(w) - \frac{Im(w)^2}{2} + Re(w) + \frac{Im(w)^2}{2},$$

On obtient pour fonction de normalisation :

$$\mathcal{N}_2(1 + w) = e^{iIm(w)} \frac{1 + \frac{Re(w) + \frac{Im(w)^2}{2}}{1 + iIm(w) - \frac{Im(w)^2}{2}}}{\left| 1 + \frac{Re(w) + \frac{Im(w)^2}{2}}{1 + iIm(w) - \frac{Im(w)^2}{2}} \right|},$$

qui s'appuie cette fois sur une approximation d'ordre deux de la fonction $e^{iIm(w)}$. Numériquement, les tests effectués ne montrent pas de différence entre une approximation de l'exponentielle au premier ordre ou au deuxième ordre pour la normalisation.

Numériquement, on utilise plutôt l'opérateur discret suivant :

Proposition 4.6. Une approximation numérique de l'opérateur de propagation est donnée par :

$$G_{\pm}^{0,a,num}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm} = \mathcal{F}_{\mathbf{k}'}^{-1} \left(q_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z) \mathcal{F} \left(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm} \right) \right. \\ \left. \times \mathcal{N} \left(1 - i\omega\Delta z \sum_{j=1}^n a_j \tilde{q}_{\pm}^{0,a,j}(z \mp \Delta z, z) \frac{\mathcal{F}_{\mathbf{x}'} \left(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\delta^j(\cdot, z)\varphi_{\pm} \right)}{\mathcal{F} \left(h_{\pm}^{0,a,0}(z \mp \Delta z, z)\varphi_{\pm} \right)} \right) \right)$$

Cet opérateur de propagation s'exprime en quelque sorte comme le produit de deux opérateurs unitaires. Le premier coïncide avec l'opérateur de Split-Step Fourier utilisé par P.L. Stoffa [65]. Le GSP peut donc être vu comme un opérateur de Split-Step Fourier corrigé.

Dans le cas où $\epsilon = 1$, on suit exactement la même démarche, avec cette fois

$$\sigma \left(A_{\pm}^1(z) \right) (\mathbf{x}', \mathbf{k}', \omega) = \mp i\omega\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) - \sigma(T_0(z))(\mathbf{x}', \mathbf{k}'/\omega).$$

Comme on choisira P_0 pour que $\sigma(T_0) = -\sigma(R_0)$, les calculs propres du terme de transmission $\sigma(T_0)$ sont en fait développés au chapitre suivant qui est consacré à l'opérateur de réflexion et au calcul de $\sigma(R_0)$. On remarque cependant que la phase de normalisation introduite au niveau numérique n'est plus utile ici car dès le départ, l'opérateur $G_{\pm}^1(\cdot, \cdot)$ n'est pas unitaire puisque le symbole de $A_{\pm}^1(z)$ est un complexe de partie imaginaire non nulle.

4.2 Décomposition

La décomposition de la source consiste à projeter sur les sous-espaces propres la source réelle \mathbf{F} . Il s'agit donc uniquement d'appliquer l'opérateur P^{-1} à \mathbf{F} . Celui-ci est donné de façon analytique, une fois que l'on a choisi la base de vecteurs propres. D'un point de vue numérique, c'est ce terme qui est associé à l'arrivée directe.

4.3 Approximation de Padé sur le propagateur

Dans le cadre des équations paraxiales, les approximations de Taylor sont connues pour générer des instabilités numériques. Cette observation a motivé des travaux utilisant des approximants de Padé dans l'idée de stabiliser les schémas numériques. On peut citer les travaux de L. Halpern et J. Rauch [44] pour les équations one-way et plus récemment, quelques résultats ont été présentés dans [3] dans le contexte des méthodes OSRC (On Surface Radiation Condition). Nous renvoyons aussi à Van Stralen, de Hoop et Blok [68] pour une revue détaillée sur les approximations rationnelles des équations paraxiales.

Dans ce paragraphe, nous montrons comment intégrer des approximants de Padé dans la construction de l'opérateur de propagation approché. Ici encore, nous ne détaillons que le cas $\epsilon = 0$. Ce travail est motivé par le fait que l'on a constaté qu'une approximation de Taylor conduit à un opérateur approché non unitaire. Il s'agit d'une piste de recherche future car le schéma numérique proposé ne donne pas des résultats corrects au moment de la rédaction de ce mémoire.

Notons W_z le champ propagé calculé à la profondeur z . Il s'obtient à partir du champ $W_{z \mp \Delta z}$ auquel on applique l'opérateur de propagation $G_{\pm}^0(z \mp \Delta z, z)$. Avant séparation des variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' et discrétisation, l'opérateur de propagation est représenté par son symbole principal, dont nous rappelons l'expression évaluée en $(z \mp \Delta z, z)$ dans laquelle on applique la formule de la moyenne :

$$\begin{aligned} \sigma_P(G_{\pm}^0(z \mp \Delta z, z)) &= \exp(-i\omega\Delta z\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)) \\ &\times \exp(-i\omega\Delta z\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z, 0)) \\ &\times \exp(-i\omega\Delta z(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec $(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z, 0)$.

La dernière exponentielle est délicate à traiter numériquement car les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' y sont mêlées. Initialement, nous avons remplacé cette exponentielle par un développement de Taylor au premier ordre. Mais on peut aussi utiliser un approximant de Padé au premier ordre de la forme : pour q assez petit,

$$e^{iq} \simeq \frac{1 + i\beta q}{1 - i\beta q}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Ainsi approché, on a :

$$\exp(-i\omega\Delta z(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)) \simeq \frac{1 + i\omega\beta\Delta z(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)}{1 - i\omega\beta\Delta z(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)} \quad (4.11)$$

Cette approximation rationnelle ne conduit pas à une expression dans laquelle \mathbf{x}' et \mathbf{k}' sont séparés. Toutefois, on peut décomposer l'opérateur de propagation en une série de propagateurs élémentaires comme suit.

Afin de simplifier un peu les notations, nous nous limitons à décrire le schéma numérique dans le cas de la descente. Seul $G_+^0(z - \Delta z, z)$ est donc considéré. On note $G_+^{0,a}(z - \Delta z, z)$ l'opérateur dont le symbole est donné par (4.10) dans lequel on injecte (4.11).

Notons $G_+^{0,1}$ l'opérateur dont le symbole est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma(G_+^{0,1}) &= \exp(-i\omega\Delta z\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)) \\ &\times \exp(-i\omega\Delta z\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z, 0))(1 + \sigma_+^1) \end{aligned}$$

où $\sigma_+^1 = -i\omega\beta\Delta z(\Delta\tilde{\gamma}_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)$.

Notons Σ_+^1 l'opérateur dont le symbole est σ_+^1 . On a alors relation :

$$G_+^0(z - \Delta z, z) = (I - \Sigma_+^1)^{-1}G_+^{0,1}$$

modulo un opérateur régularisant.

On propose donc comme schéma numérique de propagation :

$$\begin{aligned} W_z &= G_+^0(z - \Delta z, z)W_{z-\Delta z} \\ &= (I - \Sigma_+^1)^{-1}G_+^{0,1}W_{z-\Delta z} \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'opérateur $(I - \Sigma_+^1)^{-1}$ entraîne une écriture implicite de W_z de la forme :

$$W_z = G_+^{0,1}W_{z-\Delta z} + \Sigma_+^1 W_z$$

et on propose de résoudre cette équation par le schéma itératif suivant :

$$\text{pour } k \geq 1, \quad W_z^k = G_+^{0,1}W_{z-\Delta z} + \Sigma_+^1 W_z^{k-1} \quad (4.13)$$

où W_z^0 est donné au départ. Le schéma (4.13) se récrit aussi sous la forme :

$$\forall k \geq 1 \quad W_z^k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (\Sigma_+^1)^j \right) G_+^{0,1}W_{z-\Delta z} + (\Sigma_+^1)^k W_z^0. \quad (4.14)$$

Par construction de Σ_+^1 , pour des valeurs raisonnables de β , le symbole σ_+^1 est petit (c'est le petit paramètre pour l'approximation de Padé). En supposant qu'on choisit β pour que $|\sigma_+^1| \ll 1$, on a :

$$(\Sigma_+^1)^k W_z^0 = \int e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \sigma((\Sigma_+^1)^k) \widehat{W}_z^0 d\mathbf{k}'.$$

Si on fait de nouveau l'hypothèse que $|(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))|$ est borné indépendamment de \mathbf{k}' , on obtient,

$$|(\Sigma_+^1)^k W_z^0| \leq \sup_{\mathbf{k}'} |\sigma((\Sigma_+^1)^k)| \|W_z^0\|_{L^1}.$$

D'où, si

$$\sup_{\mathbf{k}'} |\sigma((\Sigma_+^1)^k)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \quad (4.15)$$

alors

$$(\Sigma_+^1)^k W_z^0 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

La condition (4.15) est vérifiée sous l'hypothèse $|\sigma(\Sigma_+^1)| \ll 1$ en supposant $(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))$ borné.

Notons alors W_z^∞ la limite des itérés $(W_z^k)_{k \geq 0}$. On a donc, d'après (4.14)

$$W_z^\infty = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (\Sigma_+^1)^j \right) G_+^{0,1} W_{z-\Delta z} \quad (4.16)$$

ce qui montre que sous l'hypothèse (4.15), la suite $(W_z^k)_{k \geq 0}$, définie par (4.14), converge vers la solution de (4.12) puisque, au sens des opérateurs,

$$\sum_{j \geq 0} (\Sigma_+^1)^j = (I - \Sigma_+^1)^{-1}.$$

La représentation de l'opérateur Σ_+^1 dans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels sous-entend l'utilisation de plusieurs transformées de Fourier selon un schéma qui sera répété jusqu'à convergence. La méthode est donc susceptible d'être très coûteuse et le choix de W_z^0 en est d'autant plus crucial qu'il est le seul à pouvoir agir en faveur d'une diminution des coûts en réduisant le nombre d'itérations pour calculer W_z .

Le schéma implicite (4.13) converge sous l'hypothèse (4.15). Si on considère d'abord $\sigma(\Sigma_+^1) = \sigma_+^1$, on voit que

$$\sup_{\mathbf{k}'} |\sigma_+^1| = |\beta| \omega \Delta z \sup_{\mathbf{k}'} |(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))|.$$

Ensuite, en raisonnant uniquement sur les symboles principaux, on a :

$$\sigma_P((\Sigma_+^1)^k) = (\sigma_+^1)^k.$$

On en déduit donc que (4.15) est vérifiée si

$$\left[|\beta| \omega \Delta z \sup_{\mathbf{k}'} |(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))| \right]^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui sous-entend que l'on doit avoir pour tout \mathbf{k}' ,

$$h = |\beta| \omega \Delta z |(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))| < 1.$$

On retrouve donc l'hypothèse qui permet de justifier un développement de Padé (ou de Taylor).

Concernant cette hypothèse, voyons ce qu'elle entraîne comme condition sur la vitesse de référence ou sur Δz . On sait que (voir paragraphe 4.1.2) :

$$\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\delta(\mathbf{x}', z)^j}{\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)^{2j-1}}$$

et

$$\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega) = \sqrt{\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}}.$$

On a alors pour h :

$$h = |\beta|\omega\Delta z \left| \sum_{j=1}^n a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j \left(\frac{1}{\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)^{2j-1}} - c_r(z)^{2j-1} \right) \right|$$

En remplaçant δ par son expression, et on remarquant que $\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega) < 1/c_r(z)$, on aboutit à :

$$h = |\beta|\omega\Delta z \sum_{j=1}^n a_j \frac{1}{c_r} \left(1 - \left(\frac{c_r}{c} \right)^2 \right)^j \left(\frac{1}{(c_r \gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega))^{2j-1}} - 1 \right)$$

Choisissons $n = 1$. On a donc :

$$h \simeq \frac{|\beta|\omega\Delta z}{c_r} \left(1 - \left(\frac{c_r}{c} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{c_r \gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)} - 1 \right),$$

et en imposant $h < 1$, on obtient :

$$\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega) > \frac{1}{\frac{c_r^2}{|\beta|\omega\Delta z \left(1 - \left(\frac{c_r}{c} \right)^2 \right)} + c_r}$$

Connaissant la valeur de γ_r , on en déduit une condition sur $\frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}$:

$$\frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} < \frac{1}{c_r(z)^2} - \left(\frac{1 - \left(\frac{c_r}{c} \right)^2}{\frac{c_r^2}{|\beta|\omega\Delta z} + c_r \left(1 - \left(\frac{c_r}{c} \right)^2 \right)} \right)^2. \quad (4.17)$$

Or, on travaille dans le cône de propagation, *i.e.* $\frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} < \frac{1}{c^2}$, ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} < \frac{1}{c_r(z)^2} - \left(\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{1}{c^2} \right).$$

Il ne reste plus qu'à comparer les deux expressions. On peut noter que :

$$\left(\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{1}{c^2} \right) = \frac{1}{c_r(z)^2} \left(1 - \left(\frac{c_r}{c} \right)^2 \right)$$

et

$$\left(\frac{1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2}{\frac{c_r^2}{|\beta|\omega\Delta z} + c_r \left(1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2\right)} \right)^2 = \frac{1}{c_r(z)^2} \left(1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2\right) \frac{1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2}{\left(\frac{c_r}{|\beta|\omega\Delta z} + 1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2\right)^2}$$

Si

$$\frac{1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2}{\left(\frac{c_r}{|\beta|\omega\Delta z} + 1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2\right)^2} < 1, \quad (4.18)$$

on a donc

$$-\left(\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{1}{c^2}\right) < -\left(\frac{1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2}{\frac{c_r^2}{\omega\Delta z} + c_r \left(1 - \left(\frac{c_r}{c}\right)^2\right)}\right)^2$$

Ainsi, si \mathbf{k}' est dans le cône de propagation, $\frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}$ vérifie (4.17) et on a bien $h < 1$. La condition (4.18) conduit à résoudre l'inégalité suivante :

$$p(X) = X^3 - 2aX^2 + (a^2 - 1)X + 2a > 0 \quad (4.19)$$

avec $X = \frac{c_r}{c}$ et $a = \frac{c}{|\beta|\omega\Delta z}$. On peut noter que $a > 0$ et $X \in]0, 1]$. On a aussi $p(0) = 2a > 0$ et $p(1) = a^2 > 0$. La dérivée du polynôme (4.19) s'annule en deux points X_1 et X_2 , $X_1 \leq X_2$ dépendant de a . Le point X_2 est un minimum local. Si $a > 2 - \sqrt{2}$, $X_2 > 1$ et donc $p(X) > 0$, $\forall X \in]0, 1]$. Pour $a \leq 2 - \sqrt{2}$, $X_2 < 1$ mais $p(X_2) > 0$.

Par conséquent, la condition (4.19) est toujours vérifiée pour $X \in]0, 1]$, indépendamment de a et donc de Δz . La condition (4.15) est donc satisfaite sans contrainte sur le pas Δz .

On peut aussi écrire un schéma explicite pour le propagateur approché par un développement de Padé. En effet, revenons à la relation

$$W_z = (I - \Sigma_+^1)^{-1} G_+^{0,1} W_{z-\Delta z}.$$

On peut approcher $(I - \Sigma_+^1)^{-1}$ par $(I + \Sigma_+^1)$ en tronquant la série de Neumann de $(I - \Sigma_+^1)^{-1}$ au premier ordre. On obtient ainsi :

$$W_z = (I + \Sigma_+^1) G_+^{0,1} W_{z\Delta z}.$$

Maintenant, si on représente $(I + \Sigma_+^1) G_+^{0,1}$ par son symbole principal, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_P((I + \Sigma_+^1) G_+^{0,1}) &= e^{-i\omega\Delta z \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)} - \frac{1}{c_0(z)}\right)} e^{-i\omega\Delta z \gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)} \\ &\times \left(1 - i\omega(2\beta)\Delta z a_1 \delta(\mathbf{x}', z) \left(\frac{1}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)} - c_0(z)\right)\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le symbole (4.20) s'obtient à partir des symboles $\sigma_P(\Sigma_+^1)$ et $\sigma_P(G_+^{0,1})$ approchés au premier ordre, c'est-à-dire après troncature du développement de $(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))$ au delà du premier terme. En clair, on considère :

$$\sigma(\Sigma_+^1) \simeq -i\omega\beta\Delta z a_1 \delta(\mathbf{x}', z) \left(\frac{1}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)} - c_0(z)\right)$$

et

$$\sigma(G_+^{0,1}) \simeq e^{-i\omega\Delta z\left(\frac{1}{c(\mathbf{x}',z)} - \frac{1}{c_0(z)}\right)} e^{-i\omega\Delta z\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)} \left(1 - i\omega\beta\Delta z a_1 \delta(\mathbf{x}', z) \left(\frac{1}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)} - c_0(z)\right)\right).$$

Ensuite, on applique la relation :

$$\sigma_P((I + \Sigma_+^1)G_+^{0,1}) = (1 + \sigma_+^1)\mathcal{G}_+^{\prime,\infty}.$$

On remarque que si on prend $\beta = 0.5$, on retrouve exactement le même propagateur approché que dans le cas d'une approximation de Taylor. On obtient ainsi un schéma explicite mais le symbole de Σ_+^1 s'exprime en fonction de $1/\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)$ ce qui va se traduire par des difficultés lorsque $\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)$ est proche de 0.

Dans ce que l'on vient de présenter, on écrit le symbole γ_0 en fonction d'un symbole de référence γ_r associé à un milieu de référence. Cette approximation permet de séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' dans le symbole γ_0 . Puis on considère l'exponentielle de Γ_0 et on voudrait garder les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' séparées. Mais l'exponentielle du produit de fonctions nous pose donc des problèmes, d'où l'idée de l'approcher par un développement de Taylor ou de Padé.

Cette approche avait pour but de conserver l'exponentielle pour le milieu de référence et donc de construire un propagateur qui soit exact dans le cas de milieux stratifiés. On pourrait tenter une autre approche qui consisterait à approcher d'abord l'exponentielle puis à faire le développement de γ_0 par rapport au milieu de référence. Dans ce cas, le schéma implicite deviendrait :

$$\forall k \geq 1 \quad W_z^k = (Id + \beta(-i\omega\Delta z\Gamma_0))W_{z-\Delta z} + \beta(-i\omega\Delta z\Gamma_0)W_z^{k-1} \quad (4.21)$$

Le développement en série de Bremmer s'écrit dans ce cas :

$$W_z = \left(\sum_{j=0}^M (\beta(-i\omega\Delta z\Gamma_0))^j \right) (Id + \beta(-i\omega\Delta z\Gamma_0))W_{z-\Delta z} \quad (4.22)$$

Dans tout ce qui a été fait jusque là, on peut remarquer que le propagateur de propagation nécessite deux développements, un premier du symbole de γ_0 par rapport au milieu de référence, et un second de l'exponentielle. Au début du chapitre, on a considéré deux développements de Taylor. Dans cette partie, on a introduit les approximants de Padé pour approcher l'exponentielle, car cette méthode est plus stable. Mais on a conservé le développement de Taylor pour γ_0 , ce qui introduit des singularités liées aux termes en $1/\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)$ et ces singularités ne sont pas contrôlées par le développement de Padé. Faire tous les développements en utilisant les approximants de Padé et en conservant le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels introduit un modèle très complexe, surtout si on veut séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' pour limiter les coûts de calculs. Cet aspect explique certainement que dans [68], les auteurs choisissent de discrétiser le propagateur par différences finies après approximation de l'exponentielle par un développement de Padé.

Chapitre 5

Analyse et optimisation de l'opérateur de réflexion

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'opérateur de réflexion dans le cas où P_0 a pour symbole la matrice $\mathcal{P}_{0,LR}$. Au chapitre 2, l'opérateur de réflexion a été défini comme l'opérateur anti-diagonal $R_0 J_2$ où $R_0 \in \text{OPS}^0$ est scalaire et égal à $\frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0$. On rappelle que l'on a $R_0 = -T_0$ où T_0 représente l'opérateur de transmission. C'est pourquoi nous ne consacrerons pas de chapitre à ce dernier.

Dans une première partie, nous définissons l'opérateur R_0 à partir de son symbole principal. On utilise donc le même opérateur que J. Le Rousseau [61]. On considère donc un opérateur de réflexion approché que nous comparons au coefficient de réflexion qui est calculé par les géophysiciens pour l'étude des milieux stratifiés, c'est-à-dire quand la vitesse de propagation ne varie qu'en fonction de la profondeur. On montre que dans le cas général où la vitesse varie dans toutes les directions, on peut aussi faire une comparaison mais sous l'hypothèse que le symbole de R_0 est à variables séparées. Cette hypothèse n'est pas contraignante puisque nous travaillons dans cette classe de symboles pour les tests numériques.

La suite du chapitre est consacrée à l'opérateur discrétisé. Tous les développements qui y sont rassemblés ont été motivés par des tests numériques où on a obtenu de mauvais résultats. Afin de comprendre leurs origines, nous avons construit un nouvel opérateur de réflexion dont le symbole est une approximation d'ordre arbitraire du symbole exact. On obtient ainsi un symbole d'ordre deux et on observe une nette amélioration des résultats. Outre le problème de l'approximation du symbole exact, le calcul de la réflexion est sensible car le symbole de l'opérateur admet deux fréquences singulières. Ces deux fréquences peuvent s'éviter en travaillant dans le plan complexe. Nous avons observé des instabilités causées par cette technique de calcul, ce qui nous a conduit à changer le chemin suivi dans le plan complexe. Celui-ci varie en fonction d'un angle critique qui est calculé à partir des caractéristiques du milieu de référence. Il évolue donc à chaque changement de profondeur et on améliore la stabilité des calculs.

5.2 Opérateur de réflexion

Cette section est consacrée à l'opérateur de réflexion R_0 . On rappelle que R_0 est défini par $R_0 = \frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0$ lorsque l'on choisit l'opérateur P_0 ayant pour symbole la matrice $\mathcal{P}_{0,LR}$. Dans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels, R_0 est déterminé *via* son symbole $\sigma(R_0)$. Comme pour l'opérateur de propagation, on veut définir un symbole approché à variables séparées, de façon à limiter les coûts numériques.

5.2.1 Symbole de l'opérateur de réflexion

Dans le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels, l'opérateur R_0 admet la représentation intégrale

$$R_0\varphi = \int e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \sigma(R_0)(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \widehat{\varphi}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (5.1)$$

où $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ est une fonction test, $\sigma(R_0)$ désigne le symbole de R_0 et $\widehat{\varphi}$ représente la transformée de Fourier partielle de φ par rapport à \mathbf{x}' .

On rappelle que Γ_0 est l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est donné par :

$$\sigma(\Gamma_0) = \gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} - \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega^2}}$$

et c désigne la vitesse de propagation. Le cône de propagation \mathcal{H} correspond aux fréquence \mathbf{k}' telles que :

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^2, \quad |\mathbf{k}'| < \frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \right\}$$

et le symbole γ_0 est un réel pour $\mathbf{k}' \in \mathcal{H}$. Le symbole γ_0^{-1} est bien défini dans \mathcal{H} et il définit le symbole principal de Γ_0^{-1} .

Lemme 5.1. *Le symbole de l'inverse de l'opérateur pseudo-différentiel Γ_0 est donné par :*

$$\sigma(\Gamma_0^{-1}) = \gamma_0^{-1} + \frac{i}{\gamma_0} (\nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \gamma_0) + \sum_{j \geq 2} \sigma_{-j} \text{ mod. } S^\infty.$$

où $\forall j \geq 2$, $\sigma_{-j} = -\frac{1}{\gamma_0} \left(\sum_{|\alpha|=1}^j \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma_{-j+|\alpha|} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \gamma_0 \right)$.

Démonstration. D'après le paragraphe 1.5 du chapitre 1, on a :

$$1 = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma(\Gamma_0^{-1}) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma(\Gamma_0) \quad (5.2)$$

avec $\sigma(\Gamma_0) = \gamma_0$. On cherche $\sigma(\Gamma_0^{-1})$ sous forme d'un développement asymptotique :

$$\sigma(\Gamma_0^{-1}) \simeq \sum_{j \geq 0} \sigma_{-j}(\mathbf{x}, \mathbf{k}'/\omega)$$

où $\sigma_{-j} \in S^{-j}$ pour $j \geq 0$. En utilisant (5.2) et en identifiant chaque σ_{-j} par rapport au degré d'homogénéité, on obtient bien que le symbole principal de Γ_0^{-1} donné par le terme σ_0 coïncide avec γ_0^{-1} . Le terme suivant σ_{-1} est donné par l'équation algébrique

$$0 = \gamma_0 \sigma_{-1} - i \partial_{\mathbf{k}'} \gamma_0^{-1} \partial_{\mathbf{x}'} \gamma_0,$$

soit :

$$\sigma_{-1} = \frac{i}{\gamma_0} (\partial_{k_x} \gamma_0^{-1} \partial_x \gamma_0 + \partial_{k_y} \gamma_0^{-1} \partial_y \gamma_0). \quad (5.3)$$

On peut généraliser (5.3) et déterminer l'expression de σ_{-j} par récurrence. On obtient :

$$\sigma_{-j} = -\frac{1}{\gamma_0} \left(\sum_{|\alpha|=1}^j \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma_{-j+|\alpha|} \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \gamma_0 \right) \quad (5.4)$$

■

En pratique, on se contente d'approcher $\sigma(\Gamma_0^{-1})$ par γ_0^{-1} . Cette approximation est suffisante car si on considère le symbole σ_{-1} , il s'exprime à partir de γ_0^{-5} dont les valeurs sont petites et très proches des limites numériques imposées par la représentation des réels sur 32 bits.

On définit alors $R_{0,0}$ via le symbole principal de R_0 . On pose :

Définition 5.2. *L'opérateur de réflexion $R_{0,0}$ associé au GSP est l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole $\sigma(R_{0,0}) = r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)$ est donné par*

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \frac{1}{2} \gamma_0^{-1}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \partial_z \gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega).$$

Dans la suite, quand on parlera de l'opérateur $R_{0,0}$, cela signifiera donc que l'on considère l'opérateur dont le symbole est exactement r_0 .

Le symbole r_0 dépend de (\mathbf{x}', z) comme la vitesse de propagation. Il n'est cependant pas à variables séparées. Une autre approximation sera nécessaire pour obtenir cette propriété.

5.2.2 Relation entre le symbole et le coefficient de réflexion

On en vient maintenant à établir un lien entre l'opérateur de la définition 5.2 utilisé dans le GSP comme opérateur de réflexion et le coefficient de réflexion. Pour cela, on se place dans le cas simple où la vitesse de propagation c ne dépend pas de \mathbf{x}' . Dans ce cas, le symbole de $R_{0,0}$ ne dépend pas de \mathbf{x}' . Pour fixer les idées, on considère le cas discrétisé et on note, pour une interface située en $z = z_0$, $c(z) = c_1$ pour $z \in]z_0 - \Delta z, z_0[$ et $c(z) = c_2$ pour $z \in]z_0, z_0 + \Delta z[$, où Δz est le pas de discrétisation selon l'axe Oz . Soit $u^{inc}(\mathbf{x}', z, \omega)$ le champ incident et $u^{refl}(\mathbf{x}', z, \omega)$ le

champ réfléchi. Le coefficient de réflexion C^{refl} est évalué en $z = z_0$ et il est défini par la relation suivante :

$$|\widehat{u}^{refl}(z_0, \mathbf{k}', \omega)| = C^{refl}(z = z_0, \mathbf{k}'/\omega) |\widehat{u}^{inc}(z_0, \mathbf{k}', \omega)|. \quad (5.5)$$

Son expression est connue analytiquement dans le cas d'un modèle standard bi-couche. Elle dépend des deux vitesses c_1 et c_2 ainsi que de l'angle d'incidence α mesuré par rapport à la verticale. Elle est donnée par [29] :

$$C_{exact}^{refl} = \frac{c_2 \cos \alpha - c_1 \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \alpha}}{c_2 \cos \alpha + c_1 \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \alpha}}.$$

Notre objectif est de montrer que *via* une approximation, on peut établir un lien entre (5.5) et le symbole de l'opérateur de réflexion. Pour cela, on va considérer l'opérateur de propagation $G_-^\epsilon(z_0, z_0 - \Delta z)$, défini au chapitre précédent, qui propage un champ situé à la profondeur z_0 jusqu'à la profondeur $z_0 - \Delta z$. On peut alors calculer le champ réfléchi à la profondeur $z_0 - \Delta z$ de deux façons. La plus simple consiste à dire que le champ réfléchi en $z_0 - \Delta z$ est obtenu en propageant le champ réfléchi en $z_0 - \Delta z$ de z_0 . On a donc :

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0 - \Delta z, \omega) = G_-^\epsilon(z_0, z_0 - \Delta z) (u^{refl}(\mathbf{x}', z_0, \omega)), \quad (5.6)$$

On a vu au chapitre 3 (voir aussi [30]) que dans la méthode GSP, on détermine $u^{refl}(\mathbf{x}', z_0 - \Delta z, \omega)$ en sommant sur l'épaisseur Δz , séparant z_0 de $z_0 - \Delta z$, toutes les contributions des champs réfléchis calculés à partir de l'opérateur de réflexion $R_{0,0}$:

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0 - \Delta z, \omega) = - \int_{z_0 - \Delta z}^{z_0} G_-^\epsilon(\zeta, z_0 - \Delta z) (R_{0,0} u^{inc}(\mathbf{x}', \zeta, \omega)) d\zeta \quad (5.7)$$

L'expression (5.7) est approchée numériquement par une méthode de rectangles :

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0 - \Delta z, \omega) \simeq -\Delta z G_-^\epsilon(z_0, z_0 - \Delta z) (R_{0,0} u^{inc}(\mathbf{x}', z_0, \omega)) \quad (5.8)$$

On déduit donc de (5.6) et (5.8) que :

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0, \omega) \simeq -\Delta z R_{0,0} u^{inc}(\mathbf{x}', z_0, \omega) \quad (5.9)$$

Dans le cas d'un modèle bi-couche standard, le symbole de $R_{0,0}$ ne dépend pas de \mathbf{x}' . La relation (5.9) s'écrit donc :

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0, \omega) \simeq -\Delta z \int e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} r_0(z_0, \mathbf{k}'/\omega) \widehat{u}^{inc}(z_0, \mathbf{k}', \omega) d\mathbf{k}' \quad (5.10)$$

soit,

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0, \omega) \simeq -\Delta z \mathcal{F}^{-1} (r_0(z_0, \cdot) \widehat{u}^{inc}(z_0, \cdot, \omega)) (\mathbf{x}').$$

Ainsi, en appliquant une transformée de Fourier au champ réfléchi en z_0 , on obtient la relation :

$$\widehat{u}^{refl}(z_0, \mathbf{k}', \omega) \simeq -\Delta z r_0(z_0, \mathbf{k}'/\omega) \widehat{u}^{inc}(z_0, \mathbf{k}', \omega) \quad (5.11)$$

En comparant (5.5) et (5.11), on obtient :

$$C^{refl}(z = z_0, \mathbf{k}'/\omega) = \Delta z |r_0(z_0, \mathbf{k}'/\omega)|.$$

Cette relation est intéressante car elle montre le lien entre le coefficient de réflexion et le symbole numérique de $R_{0,0}$. Elle peut être vue, en quelque sorte, comme une façon de justifier que $R_{0,0}$ est l'opérateur de réflexion, sans considérer que dans le modèle, $R_{0,0}$ intervient dans le couplage des champs descendant et montant. Le facteur (Δz) montre que le symbole de $R_{0,0}$ n'est pas exactement le coefficient de réflexion. On peut penser que cela vient du fait que le symbole de $R_{0,0}$ s'exprime comme une dérivée par rapport à z et Δz en représente l'approximation.

Dans le cas plus général où le symbole de $R_{0,0}$ dépend de \mathbf{x}' et \mathbf{k}' , on a vu au chapitre 1 que l'on peut considérer deux représentations de $R_{0,0}$. Supposons que le symbole de $R_{0,0}$ est à variables séparées. On écrit $\sigma(R_{0,0})$ sous la forme :

$$\sigma(R_{0,0}) = \sigma^{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}', z) \sigma^{\mathbf{k}'}(z, \mathbf{k}'/\omega)$$

où $\sigma^{\mathbf{x}'}$ et $\sigma^{\mathbf{k}'}$ sont des fonctions de S^0 .

Si on considère la représentation standard, on a :

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0, \omega) \simeq -\Delta z \sigma^{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}', z_0) \mathcal{F}^{-1} \left(\sigma^{\mathbf{k}'}(z_0, \cdot) \widehat{u}^{inc}(z_0, \cdot, \omega) \right) (\mathbf{x}')$$

ce qui donne après transformée de Fourier,

$$\widehat{u}^{refl}(z_0, \mathbf{k}', \omega) \simeq -\Delta z \left(\mathcal{F} \left(\sigma^{\mathbf{x}'}(\cdot, z_0) \right) (\mathbf{k}') * \left(\sigma^{\mathbf{k}'}(z_0, \mathbf{k}'/\omega) \widehat{u}^{inc}(z_0, \mathbf{k}', \omega) \right) \right) \quad (5.12)$$

où $*$ désigne le produit de convolution. La relation (5.12) ne montre plus de façon aussi claire la relation entre le coefficient de réflexion et le symbole de $R_{0,0}$.

Si maintenant on représente $R_{0,0}$ par la formulation (1.7) du chapitre 1, on a :

$$u^{refl}(\mathbf{x}', z_0, \omega) \simeq -\Delta z \mathcal{F}^{-1} \left(\sigma^{\mathbf{k}'}(z_0, \mathbf{k}'/\omega) \mathcal{F} \left(\sigma^{\mathbf{x}'}(\cdot, z_0) u^{inc}(z_0, \cdot, \omega) \right) (\mathbf{k}') \right) (\mathbf{x}')$$

et cette fois-ci, par transformée de Fourier, on obtient :

$$\widehat{u}^{refl}(z_0, \mathbf{k}', \omega) \simeq -\Delta z \sigma^{\mathbf{k}'}(z_0, \mathbf{k}'/\omega) \mathcal{F} \left(\sigma^{\mathbf{x}'}(\cdot, z_0) u^{inc}(z_0, \cdot, \omega) \right) (\mathbf{k}')$$

Dans ce cas, on a donc :

$$\widehat{u}^{refl}(z_0, \mathbf{k}', \omega) \simeq -\Delta z \sigma^{\mathbf{k}'}(z_0, \mathbf{k}'/\omega) \left(\widehat{\sigma}^{\mathbf{x}'}(\cdot, z_0) * \widehat{u}^{inc}(z_0, \cdot, \omega) \right) (\mathbf{k}') \quad (5.13)$$

Les expressions (5.12) et (5.13) diffèrent. Dans (5.13), on exprime que $\widehat{u}^{refl}(z_0, \mathbf{k}', \omega)$ est proportionnel à $\sigma^{\mathbf{k}'}(z_0, \mathbf{k}'/\omega)$ comme dans le cas stratifié. Cependant on ne peut obtenir une relation simple entre le coefficient de réflexion et le symbole $R_{0,0}$.

Remarque 9. Le cas stratifié correspond à $\sigma^{\mathbf{x}'}(\mathbf{x}', z_0) = 1$. On a alors $\widehat{\sigma}^{\mathbf{x}'}(\cdot, z_0) = \delta$ où δ désigne la masse de Dirac. Les relations (5.12) et (5.13) sont donc identiques à (5.11).

Dans la suite, on va construire une approximation du symbole r_0 qui sera à variables séparées.

5.3 Opérateur de réflexion approché

Dans cette section, on étudie trois expressions approchées du symbole de l'opérateur de réflexion. La première partie reprend les résultats de J. Le Rousseau [61] tandis que les deux autres sont originales.

On a vu au §5.2 que dans le cas où r_0 ne dépend pas de \mathbf{x}' , il est proportionnel au coefficient de réflexion standard dans un modèle stratifié. Dans le cas général, le lien est plus difficile à établir. Toutefois, si le symbole de $R_{0,0}$ était à variables séparées en \mathbf{x}' et \mathbf{k}' , on pourrait établir une relation en choisissant la représentation (1.7) du chapitre 1.

De plus, on gagne aussi en terme de stockage de tableaux et de temps de calcul car le fait de séparer les variables et d'utiliser la représentation (1.7) du chapitre 1, limite le nombre de transformées de Fourier à réaliser. C'est pourquoi les approximations de $\sigma(R_{0,0})$ vont toutes être motivées par la séparation des variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' .

5.3.1 Symbole proposé par J. Le Rousseau

D'après la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels, le symbole de l'opérateur $R_0 = \frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0$ est donné par la formule

$$\sigma(R_0) = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{k}'}^\alpha \sigma(\Gamma_0^{-1}) \partial_{\mathbf{x}'}^\alpha \sigma(\partial_z \Gamma_0). \quad (5.14)$$

J. Le Rousseau [61] a proposé d'approcher (5.14) par son symbole principal, c'est-à-dire de ne prendre en compte que le premier terme dans (5.14). Si on note $r_0 = r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)$ la fonction correspondante, on a :

$$r_0 = \sigma_P(R_0) = \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0$$

et on retrouve le symbole de la définition 5.2 de ce chapitre.

Le terme $\partial_z \gamma_0$ est approché par $\frac{\gamma_0^+ - \gamma_0^-}{\Delta z}$ où on rappelle que, comme au chapitre 4,

$$\gamma_0^+ = \gamma_0(\mathbf{x}', z + \frac{1}{2}\Delta z; \mathbf{k}'/\omega) \text{ et } \gamma_0^- = \gamma_0(\mathbf{x}', z - \frac{1}{2}\Delta z; \mathbf{k}'/\omega).$$

Quant à γ_0^{-1} , on l'approche par sa valeur moyenne $2(\gamma_0^+ + \gamma_0^-)^{-1}$. Ainsi,

$$r_0 \simeq \frac{1}{\Delta z} \frac{\gamma_0^+ - \gamma_0^-}{\gamma_0^+ + \gamma_0^-}. \quad (5.15)$$

Tel qu'il est écrit dans (5.15), r_0 dépend à la fois de \mathbf{x}' et de \mathbf{k}'/ω . Le but étant de séparer ces deux variables, dans le soucis de limiter les charges de calcul, on procède à des approximations et pour préserver l'exactitude de r_0 à l'angle 0, soit pour $\mathbf{k}' = 0$, on récrit (5.15) sous la forme :

$$r_0 = r_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) = r_0(\mathbf{x}', z; 0) + (r_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - r_0(\mathbf{x}', z; 0)) \quad (5.16)$$

et on développe le second terme à droite de l'égalité (5.16) *via* un développement de Taylor d'ordre 1 obtenu à partir du milieu de référence décrit au §4.1.2 du chapitre 4. Le symbole (5.16) est ainsi modifié et on obtient le symbole approché de J. Le Rousseau

$$\begin{aligned} r_{approx}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &= r_0(\mathbf{x}', z; 0) - r_r(z; 0) + r_r(z; \mathbf{k}'/\omega) \\ &+ a^-(z; \mathbf{k}'/\omega)\delta(\mathbf{x}', z^-) + a^+(z; \mathbf{k}'/\omega)\delta(\mathbf{x}', z^+) \end{aligned}$$

avec

$$r_r = \frac{1}{2}\gamma_r^{-1}\partial_z\gamma_r$$

et

$$\begin{aligned} a^-(z; \mathbf{k}'/\omega) &= \frac{1}{b(z, \mathbf{k}'/\omega)} \left(-\frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)} (c_r(z^+)^2 + c_r(z^-)^2) + c_r(z^-)c_r(z^+) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_r(z^-)^3}{c_r(z^+)} + 2\frac{-|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}c_r(z^-)^3c_r(z^+) \left(1 + \frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)} \right) \right) \\ a^+(z; \mathbf{k}'/\omega) &= \frac{1}{b(z, \mathbf{k}'/\omega)} \left(\frac{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)} (c_r(z^+)^2 + c_r(z^-)^2) - c_r(z^-)c_r(z^+) \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_r(z^+)^3}{c_r(z^-)} - 2\frac{-|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}c_r(z^+)^3c_r(z^-) \left(1 + \frac{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)} \right) \right) \end{aligned}$$

où

$$b(z, \mathbf{k}'/\omega) = \Delta z (\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega))^2 (c_r(z^+) + c_r(z^-))^2$$

Le symbole $r_r(z; \mathbf{k}'/\omega)$ correspond au symbole de l'opérateur de réflexion associé au milieu de référence et défini comme r_0 . Comme γ_r ne dépend pas de \mathbf{x}' , γ_r^{-1} est exactement le symbole de Γ_r^{-1} et de plus, la règle de composition des opérateurs pseudo-différentiels montre que $\sigma(\Gamma_r^{-1}(\partial_z\Gamma_r)) = \gamma_r^{-1}\partial_z\gamma_r$. La non-dépendance en \mathbf{x}' entraîne donc que r_r est exactement le symbole associé à la réflexion dans le milieu stratifié de référence, alors que son analogue r_0 , dans le milieu réel, n'est que le symbole principal de l'opérateur de réflexion. Sans surprise, on constate que la prise en compte des variations latérales de vitesse se traduit par une expression du coefficient de réflexion plus complexe.

5.3.2 Coefficient de réflexion logarithmique

L'opérateur de réflexion est donné par l'expression $R_0 = \frac{1}{2}\Gamma_0^{-1}\partial_z\Gamma_0$ et son symbole principal r_0 est défini par $r_0 = \frac{1}{2}\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0$. Le lemme suivant donne une autre expression approchée de r_0 que celle proposée par J. Le Rousseau.

Lemme 5.3. *On approche le symbole de l'opérateur de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} r_{approx}^{ln}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &= \frac{1}{\Delta z} \left[\ln \left(\frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \left[\frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{(\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{(\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. On récrit la fonction r_0 sous la forme

$$r_0 = \frac{1}{2} \partial_z \ln \gamma_0.$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \ln(\gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega)) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} - \delta(\mathbf{x}', z) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1}{c_r(z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} \right) + \ln \left(1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z)}{\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Par définition de $c_r(z)$, la quantité $\frac{\delta}{\gamma_r^2}$ est petite devant 1 ce qui autorise à approcher $\ln \left(1 - \frac{\delta}{\gamma_r^2} \right)$ par un développement de Taylor :

$$\ln \left(1 - \frac{\delta}{\gamma_r^2} \right) = \sum_{j=1}^N (-1)^j \frac{\delta^j}{j \gamma_r^{2j}} + \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{j \gamma_r^{2(N+1)}} \right)$$

Il ne reste plus alors qu'à approcher la dérivée en z par un schéma d'Euler, ce qui achève la preuve. ■

On voit clairement que cette démarche est plus constructive qu'au §5.3.1 car on peut facilement augmenter l'ordre d'approximation du coefficient, ce qui n'est pas le cas pour r_{approx} .

Le passage à cette expression diminue considérablement la complexité d'écriture du coefficient approché : par un simple développement de Taylor de la fonction $u \mapsto \ln(1 - u)$ au voisinage de 0, on obtient un coefficient de réflexion approché d'ordre arbitraire dans lequel on peut séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' en considérant un milieu de référence.

On ne perd donc pas la propriété intéressante de découpler les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' et cela uniquement en se ramenant au milieu de référence, comme dans le premier cas.

5.3.3 Coefficient de réflexion de J. Le Rousseau modifié

Si on préfère travailler avec l'expression $r_0 = \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0$, on peut choisir de calculer au préalable $\partial_z \gamma_0$. On obtient ainsi le lemme suivant.

Lemme 5.4. *L'expression approchée de r_0 en fonction des dérivées de la vitesse par rapport à z est donnée par :*

$$\begin{aligned} r_{approx}^{mod}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &= -\frac{16}{\Delta z} \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{(c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-))^3 (\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega))^2} \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^N 4^j \frac{\delta(\mathbf{x}', z)^j}{(\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} + \mathcal{O} \left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z)^{N+1}}{(\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega))^{2(N+1)}} \right) \right) \end{aligned}$$

Démonstration. L'expression de γ_0 est connue et on peut donc en effectuer la dérivée partielle par rapport à z :

$$\partial_z \gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) = -\frac{\partial_z c(\mathbf{x}', z)}{c(\mathbf{x}', z)^3} \gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega)^{-1}.$$

Ainsi on obtient pour le symbole de l'opérateur de réflexion

$$r_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_z c(\mathbf{x}', z)}{c(\mathbf{x}', z)^3} \gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega)^{-2}$$

qui s'exprime simplement comme le produit d'une fonction ne dépendant que de \mathbf{x}' et z et du symbole γ_0 . L'expression modifiée de r_0 permet de voir qu'il ne reste plus qu'à approcher γ_0 en se ramenant au milieu de référence et on obtient à nouveau un symbole approché comme un développement en puissance de γ_r dont les coefficients ne dépendent que de \mathbf{x}' et z . L'expression du symbole de l'opérateur de réflexion modifié et approché est alors donné par :

$$\begin{aligned} r_{\text{approx}}^{\text{mod}}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &= -\frac{1}{2\Delta z} \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{\left(\frac{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)}{2}\right)^3} \frac{1}{\left(\frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)}{2}\right)^2} \\ &\times \left(\sum_{j=0}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z)^j}{\left(\frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)}{2}\right)^{2j}} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z)^{N+1}}{\left(\frac{\gamma_r(z; \mathbf{k}'/\omega)}{2}\right)^{2(N+1)}}\right) \right) \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve du lemme. ■

5.4 Analyse par onde plane

Dans cette partie, il s'agit de comparer les résultats obtenus selon le choix du symbole approché pour la réflexion. Afin d'ajuster les résultats numériques, on se place dans la configuration 2D d'un réflecteur plan. On dispose ainsi du coefficient de réflexion exact dont on trouve l'expression dans [29] par exemple.

5.4.1 Modèle bi-couche standard

On considère un milieu de propagation constitué de deux couches séparées par une interface plane horizontale en $z = z_0$. Dans le milieu supérieur $\{z < z_0\}$, la vitesse de propagation est notée c_1 et dans le milieu inférieur $\{z > z_0\}$, la vitesse est notée c_2 . On a choisi $c_1 = 2000 \text{ ms}^{-1}$ et $c_2 = 3000 \text{ ms}^{-1}$. La source est une onde plane $u^{\text{inc}}(x, z, \omega) = e^{ik_1(x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)}$ où $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ et θ_1 désigne l'angle d'incidence dans le milieu supérieur (voir Fig. 5.1).

Les angles θ_1 et θ_2 sont liés par la loi de Snell :

$$k_1 \cos \theta_1 = k_2 \cos \theta_2 \text{ avec } k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

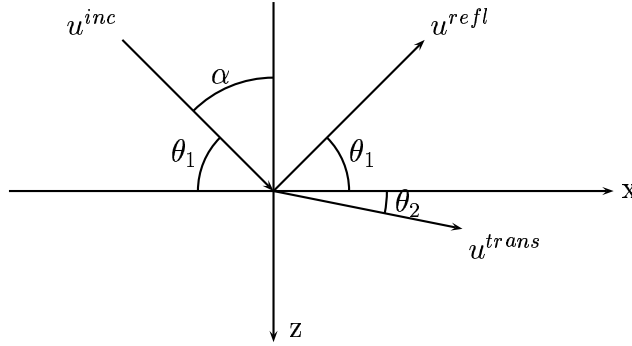


FIG. 5.1 – Angle d'incidence

et le coefficient de réflexion exact r_{exact} est donné par l'expression

$$r_{exact} = \frac{c_2 \sin \theta_1 - c_1 \sin \theta_2}{c_2 \sin \theta_1 + c_1 \sin \theta_2}$$

ou encore, en posant $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_1$,

$$r_{exact} = \frac{c_2 \cos \alpha - c_1 \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \alpha}}{c_2 \cos \alpha + c_1 \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \alpha}}$$

Dans la suite, on utilise la notation $\beta = \frac{c_2}{c_1}$ pour mesurer le contraste de vitesse entre les deux milieux. Ainsi, on écrit plutôt :

$$r_{exact} = \frac{\beta \cos \alpha - \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha}}{\beta \cos \alpha + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha}}$$

On notera que la configuration choisie correspond au cas où $c_1 < c_2$. Ce cas est celui pour lequel il existe un angle critique α_c . En effet, la loi de Snell $k_1 \sin \alpha = k_2 \cos \theta_2$ montre l'existence d'un angle critique si $\cos \theta_2 > 1$ soit, pour $\alpha > \alpha_c$ avec $\alpha_c = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$. Ce cas n'est possible que si $c_1 < c_2$.

Soient u^{refl} l'onde réfléchiée et u^{inc} l'onde incidente. Les deux ondes sont liées par la relation :

$$u^{refl}(x, z, \omega) = -\Delta z R_{0,0} u^{inc}(x, z, \omega)$$

Comme cela a été rappelé au chapitre 1, l'opérateur $R_{0,0}$ peut s'exprimer à partir de son noyau :

$$R_{0,0}\varphi = \int K_{R_{0,0}}(\cdot, y, z, \omega)\varphi(y)dy$$

où $K_{R_{0,0}}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int r_0(x, z; k_x/\omega) e^{i(x-y)k_x} dk_x$ et r_0 est le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel $R_{0,0}$. Dans le modèle choisi ici, le symbole r_0 ne dépend pas

de x . Ainsi, le noyau $K_{R_{0,0}}$ ne dépend des variables x et y que sous la forme $(x - y)$, et la réflexion se représente donc comme un produit de convolution

$$R_{0,0}\varphi = K_{R_{0,0}} * \varphi.$$

On obtient alors, en tenant compte des calculs de la section 5.2.2,

$$u^{refl} = -\Delta z K_{R_{0,0}} * u^{inc},$$

et une transformée de Fourier par rapport à x sur l'égalité précédente conduit à la relation

$$\widehat{u}^{refl}(z; k_x, \omega) = -\Delta z r_0(z; k_x/\omega) \widehat{u}^{inc}(z; k_x, \omega).$$

Ici, comme l'onde plane incidente est choisie telle que

$$\widehat{u}^{inc}(z; k_x, \omega) = \delta(k_1 \sin \alpha - k_x) e^{ik_1 \cos \alpha z},$$

la fréquence $k_x = k_1 \sin \alpha$ définit le support de $\widehat{u}^{inc}(z; k_x, \omega)$. Pour ce point particulier, on a :

$$\widehat{u}^{refl}(z; k_1 \sin \alpha, \omega) = (-\Delta z r_0(z; k_1 \sin \alpha)) \widehat{u}^{inc}(z; k_1 \sin \alpha, \omega)$$

et cette formule permet d'obtenir simplement le coefficient de réflexion à partir de u^{refl} et u^{inc} calculés numériquement, comme une fonction de l'angle d'incidence α de l'onde plane.

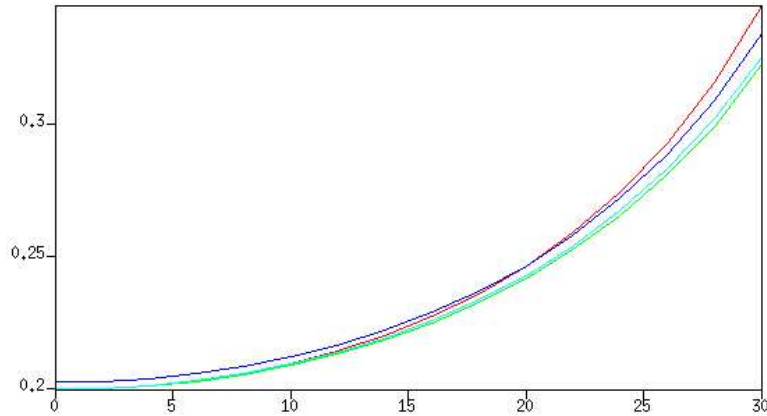


FIG. 5.2 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence

Sur la figure 5.2, on compare les différents coefficients de réflexion en fonction de l'angle lié à k_x dans l'intervalle $[0, 30^\circ]$. On peut observer que les résultats obtenus pour r_{approx} (courbe verte) sont les meilleurs puisqu'on suit parfaitement le coefficient exact r_{exact} (courbe turquoise). En fait, les résultats pour r_{approx}^{ln} (courbe bleue) sont aussi bons car la courbe est parallèle à la courbe exacte et le décalage vient du fait que r_{approx}^{ln} n'est pas exact à $k_x = 0$. Il n'y a donc qu'un problème d'initialisation. On peut noter que si r_{approx}^{mod} (courbe rouge) suit bien r_{exact} pour des petites valeurs de k_x , il s'en éloigne rapidement ce qui montre la faiblesse de cette formulation. Ces premiers résultats expliquent que dans la suite, nous nous focaliserons sur les coefficients r_{approx} et r_{approx}^{ln} .

5.4.2 Modèle bi-couche et modèle de référence constant

Au paragraphe précédent, on a vu que les symboles r_{approx} et r_{approx}^{ln} donnaient les meilleurs résultats, en faisant abstraction du décalage à $k_x = 0$ pour r_{approx}^{ln} . Nous reviendrons sur ce point plus tard. Afin de pousser plus loin l'analyse, on va modifier le modèle bi-couche de façon à ce que le modèle de référence soit constant. On prend ainsi en compte des variations latérales de vitesse dans l'opérateur de réflexion (la propagation ne se faisant que dans le milieu inférieur), tout en restant dans le cas simple bi-couche. On considère le modèle de vitesse suivant :

$$\begin{aligned} \forall (x, z) \in]0; x_{max}] \times [0; z_{intf}], \quad c(x, z) &= c_1 \\ \forall (x, z) \in]0; x_{max}] \times]z_{intf}; z_{max}], \quad c(x, z) &= c_2 \\ \forall z \in [0; z_{max}], \quad c(0, z) &= c_1 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $z \in [0, z_{max}]$, $\min_{x \in [0, x_{max}]} c(x, z) = c_1$ définit la vitesse de propagation c_r dans le milieu de référence.

Afin de calculer les coefficients r_{approx} et r_{approx}^{ln} , on a besoin de connaître la valeur de γ_r , symbole de l'opérateur γ_0 dans le milieu de référence. On est dans le cas où γ_r ne dépend que de k_x/ω :

$$\gamma_r(k_x/\omega) = \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2}}$$

et de la relation $c_1 \frac{k_x}{\omega} = \sin \alpha$, on déduit que $\gamma_r = \frac{1}{c_1} \cos \alpha$. En fait, dans notre configuration, γ_r est égal à γ_0^- évalué en $z_0 - \frac{1}{2}\Delta z$ et en tout point z^- au-dessus de l'interface. Par contre, en $z_0 + \frac{1}{2}\Delta z$ ou en n'importe quel point z^+ en-dessous de l'interface, γ_0^+ est approché au premier ordre par

$$\gamma_0^+ = \gamma_0(x, z^+, k_x/\omega) \simeq \gamma_r(k_x/\omega) + a_1 \frac{\delta(x, z^+)}{\gamma_r(k_x/\omega)}$$

où $\delta(x, z^+) = \frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} = \frac{1}{c_1^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)$. Ainsi, en première approximation, le symbole principal de l'opérateur de réflexion s'écrit :

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{1}{\Delta z} \frac{\gamma_0^+ - \gamma_0^-}{\gamma_0^+ + \gamma_0^-} = \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{\gamma_r + a_1 \frac{\delta}{\gamma_r} - \gamma_r}{\gamma_r + a_1 \frac{\delta}{\gamma_r} + \gamma_r} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \frac{a_1 \delta}{2\gamma_r^2 + a_1 \delta} \end{aligned}$$

On obtient donc le coefficient de réflexion :

$$r_a(\alpha, \beta) = \frac{-a_1 \delta}{2\gamma_r^2 + a_1 \delta} = \frac{-a_1 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)}{2 \cos^2 \alpha + a_1 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)}$$

Cette expression est aussi celle qu'on obtiendrait si on ne faisait qu'un développement de Taylor dans γ_0 en fonction de γ_r . Ce calcul de r_a permet de rendre compte de l'impact qu'à l'approximation de γ_0 sur le calcul du coefficient de réflexion dans un cas simple. Il ne s'agit que d'un calcul analytique, la séparation des variables x (dans δ) et k_x (dans γ_r) n'est pas utilisable dans cette configuration, ce n'est en fait que la première partie des approximations faites en 5.3.1.

Pour le coefficient r_{approx} suggéré par Le Rousseau et présenté au paragraphe 5.3.1, on obtient pour ce cas particulier :

$$r_{approx} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} + \frac{(\sin\alpha)^2}{4(\cos\alpha)^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right).$$

En reprenant les calculs du paragraphe 5.3.2, on peut aussi calculer la valeur de r_{approx}^{ln} . Dans ce cas, on a :

$$r_{approx}^{ln} = \frac{1 - \frac{1}{\beta^2}}{4(\cos\alpha)^2}.$$

α	r_{exact}	r_a	r_{approx}	r_{approx}^{ln}
0	0.200	0.161	0.200	0.139
10	0.209	0.167	0.204	0.143
20	0.243	0.187	0.218	0.157
30	0.325	0.227	0.246	0.185

TAB. 5.1 – Valeurs des différents coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.

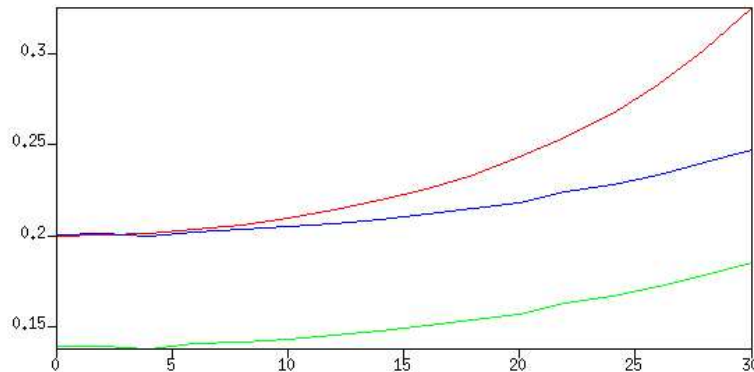


FIG. 5.3 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.

Dans la table 5.1, on a représenté les valeurs des coefficients de réflexion r_a , r_{approx} et r_{approx}^{ln} lorsque $\beta = \frac{3}{2}$, en fonction de l'angle d'incidence α (ou de k_x). On

observe que le coefficient r_{approx} , fabriqué pour être exact pour $\alpha = 0$, se comporte effectivement très bien pour de faibles valeurs de α . Ensuite, les valeurs de r_a et r_{approx}^{ln} sont inexactes pour $\alpha = 0$ ce qui est prévisible puisque d'une part r_{approx} n'est rien d'autre que r_a corrigé pour $\alpha = 0$ et on a déjà mentionné cette lacune pour r_{approx}^{ln} . Par contre, en suivant les variations de r_{approx}^{ln} , on voit qu'il suit une courbe parallèle à la courbe exacte. Moyennant une correction pour $\alpha = 0$, on devrait avoir l'équivalence entre r_{approx}^{ln} et r_{approx} .

5.4.3 Coefficient de réflexion logarithmique corrigé

Les résultats obtenus à la section précédente motive la construction d'un nouveau coefficient de réflexion qui va être exact à l'angle 0 et qui conserve les bonnes propriétés du coefficient logarithmique.

Lemme 5.5. *Le symbole de l'opérateur de réflexion exprimé en fonction du logarithme et ayant la propriété d'être exact pour $\mathbf{k}' = 0$ est donné par :*

$$\begin{aligned}
r_{modif}^{ln}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &\simeq -\frac{1}{\Delta z} \left[\frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} - \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \right. \\
&\quad + \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^{2(N+1)}} \right)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Démonstration. On revient au calcul du symbole principal de l'opérateur de réflexion R_0 :

$$\sigma_P(R_0) = \sigma(R_{0,0}) = r_0 = \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0 = \frac{1}{2} \partial_z \ln \gamma_0 = \frac{1}{4} \partial_z \ln \gamma_0^2.$$

Pour l'initialisation à $\mathbf{k}' = 0$, on part toujours du constat que dans le cas d'un modèle bi-couche d'interface localisée en $z = z_0$, le coefficient de réflexion exact à l'angle 0 est donné par :

$$r_{exact}(\mathbf{x}', z; 0) = \frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0) - \gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}{\Delta z (\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0) + \gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0))}$$

où $z^- = z_0 - \frac{1}{2} \Delta z$ et $z^+ = z_0 + \frac{1}{2} \Delta z$.

On reprend l'idée de J. Le Rousseau : on veut approcher $\sigma(R_{0,0})$ en conservant sa valeur exacte en $\mathbf{k}' = 0$. Pour cela, étant donnée f une fonction, on approche $f(y) - f(0)$ par $f_{app}(y) - f_{app}(0)$, et on a :

$$f(y) \simeq f(0) + f_{app}(y) - f_{app}(0)$$

Ainsi, pour r_0 , on obtient :

$$r_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) = \frac{1}{2}(\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0)(\mathbf{x}', z; 0) + \frac{1}{2}((\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0)(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - (\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0)(\mathbf{x}', z; 0)).$$

Le premier terme est une approximation de la dérivée par rapport à z qui donne r_{exact} en $\mathbf{k}' = 0$.

Ensuite, on fait une approximation du terme

$$\frac{1}{2}((\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0)(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - (\gamma_0^{-1}\partial_z\gamma_0)(\mathbf{x}', z; 0)).$$

Pour cela, on passe au logarithme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\gamma_0^{-1}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega)\partial_z\gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_0^{-1}(\mathbf{x}', z; 0)\partial_z\gamma_0(\mathbf{x}', z; 0)) \\ &= \frac{1}{2}\partial_z \ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z; 0)}\right) \\ &\simeq \frac{1}{2\Delta z}\left(\ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0)}\right) - \ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\Delta z}\left(\ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)}\right) - \ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}\right)\right) \end{aligned}$$

En première approximation, ne concernant que les dérivées par rapport à z , on obtient donc :

$$\begin{aligned} \sigma(R_{0,0})(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &\simeq \frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0) - \gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}{\Delta z(\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0) + \gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0))} \\ &+ \frac{1}{2\Delta z}\left(\ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)}\right) - \ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}\right)\right) \end{aligned}$$

Comme $\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0) = c^{-1}(\mathbf{x}', z^+)$ et $\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0) = c^{-1}(\mathbf{x}', z^-)$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(R_{0,0})(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &\simeq \frac{c^{-1}(\mathbf{x}', z^+) - c^{-1}(\mathbf{x}', z^-)}{\Delta z(c^{-1}(\mathbf{x}', z^+) + c^{-1}(\mathbf{x}', z^-))} \\ &+ \frac{1}{2\Delta z}\left(\ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)}\right) - \ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

La phase ultime du calcul du coefficient approché concerne les termes logarithmiques. On va d'abord traiter l'approximation pour tout \mathbf{k}' , puis on prend le cas $\mathbf{k}' = 0$ pour l'approximation de $\ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)}\right)$. On se ramène comme chaque fois au milieu de référence :

$$\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)} = \frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)\sqrt{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^2}}}{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)\sqrt{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^2}}} \quad (5.19)$$

On a donc, en substituant (5.19) dans le terme logarithmique,

$$\ln\left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)}\right) = \ln\left(\frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^2}}{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^2}}\right) \quad (5.20)$$

Ensuite, en reprenant un calcul déjà effectué au paragraphe 5.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^2}}{1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^2}} \right) &= \ln \left(1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^2} \right) - \ln \left(1 - \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^2} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^N \frac{(\delta(\mathbf{x}', z^+))^j}{j(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} + \sum_{j=1}^N \frac{(\delta(\mathbf{x}', z^-))^j}{j(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} \\ &\quad + \mathcal{O} \left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z)^{N+1}}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^{2(N+1)}} \right) \end{aligned}$$

Finalement en injectant ce résultat dans (5.20), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; \mathbf{k}'/\omega)} \right) &= \ln \left(\frac{\gamma_r(z^+; \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-; \mathbf{k}'/\omega)} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(\delta(\mathbf{x}', z^+))^j}{j(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} \quad (5.21) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(\delta(\mathbf{x}', z^-))^j}{j(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} + \mathcal{O} \left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z)^{N+1}}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^{2(N+1)}} \right) \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{k}' = 0$ dans (5.21), et en remarquant que $\gamma_r^\pm(\mathbf{k}'/\omega = 0) = (c_r(z^\pm))^{-1}$ on a :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+; 0)}{\gamma_0(\mathbf{x}', z^-; 0)} \right) &= \ln \left(\frac{\gamma_r(z^+; 0)}{\gamma_r(z^-; 0)} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(\delta(\mathbf{x}', z^+))^j (c_r(z^+))^{2j}}{j} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(\delta(\mathbf{x}', z^-))^j (c_r(z^-))^{2j}}{j} + \mathcal{O} \left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z)^{N+1}}{c_r^{-2(N+1)}} \right) \quad (5.22) \end{aligned}$$

En remplaçant les termes en logarithme dans (5.18) par (5.21) et (5.22) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(R_{0,0})(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) &\simeq \frac{c(\mathbf{x}', z^-) - c(\mathbf{x}', z^+)}{\Delta z (c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-))} + \frac{1}{2\Delta z} \ln \left(\frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta z} \ln \left(\frac{\gamma_r(z^+, 0)}{\gamma_r(z^-, 0)} \right) \quad (5.23) \\ &\quad - \frac{1}{4\Delta z} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\Delta z} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \\ &\quad + \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^{2(N+1)}} \right) \end{aligned}$$

On finit en remarquant que

$$\frac{1}{2\Delta z} \ln \left(\frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \right) \simeq \frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)}{\Delta z (\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))} \quad (5.24)$$

et

$$\frac{1}{2\Delta z} \ln \left(\frac{\gamma_r(z^+, 0)}{\gamma_r(z^-, 0)} \right) \simeq \frac{c_r(z^-) - c_r(z^+)}{\Delta z (c_r(z^+) + c_r(z^-))}$$

Le terme (5.24) correspond à la valeur exacte du coefficient de réflexion du milieu de référence. En injectant (5.24), le symbole (5.23) s'exprime donc comme une perturbation du milieu de référence, ce qui est cohérent avec l'approximation initiale de γ_0 . Il s'écrit donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned} r_{modif}^{ln}(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}'/\omega) \simeq & -\frac{1}{\Delta z} \left[\frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} - \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \right. \\ & + \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \\ & + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\ & \left. - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \right] \\ & + \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^{2(N+1)}} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

■

On illustre cette section en revenant au milieu de propagation défini au paragraphe 5.4.2. Dans ce cas, le coefficient (égal au symbole $\sigma(R_{0,0})$ multiplié par $-\Delta z$) s'écrit pour $N = 1$,

$$r_{modif,1}^{ln} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right)$$

et pour $N = 2$,

$$r_{modif,2}^{ln} = r_{modif,1}^{ln} + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right)^2 \left(\frac{1}{(\cos^2 \alpha)^2} - 1 \right)$$

L'angle critique associé à ce cas-test est égal à environ 41° . C'est pourquoi la Table 5.2 ne représente les valeurs des coefficients que jusqu'à $\alpha = 40^\circ$.

On peut observer que l'écart à l'angle 0 a été corrigé. De plus, le nouveau coefficient à l'ordre 1 est équivalent à celui de J.Le Rousseau. Mais par contre, il est plus aisé de le calculer à un ordre supérieur, et on peut observer que le passage à l'ordre 2 améliore les résultats.

5.5 Résultat avec un point de tir

Un premier test utilise la configuration décrite au §5.4.1. La source est un dirac en temps et en espace, localisé à l'interface et on enregistre le champ réfléchi au

α	r_{exact}	r_{approx}	$r_{approx,1}^{ln}$		$r_{modif,1}^{ln}$		$r_{approx,2}^{ln}$		$r_{modif,2}^{ln}$		
0	0.200	0.200	00.0%	0.139	30.6%	0.200	00.0%	0.177	11.3%	0.200	00.0%
10	0.209	0.204	02.5%	0.143	31.6%	0.204	02.5%	0.184	12.1%	0.207	01.3%
20	0.243	0.218	10.1%	0.157	35.3%	0.218	10.1%	0.207	14.9%	0.229	05.7%
30	0.325	0.246	24.3%	0.185	43.1%	0.246	24.3%	0.254	22.0%	0.276	15.0%
40	0.625	0.298	52.3%	0.237	62.1%	0.298	52.3%	0.349	44.2%	0.371	40.6%

TAB. 5.2 – Valeur des différents coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.

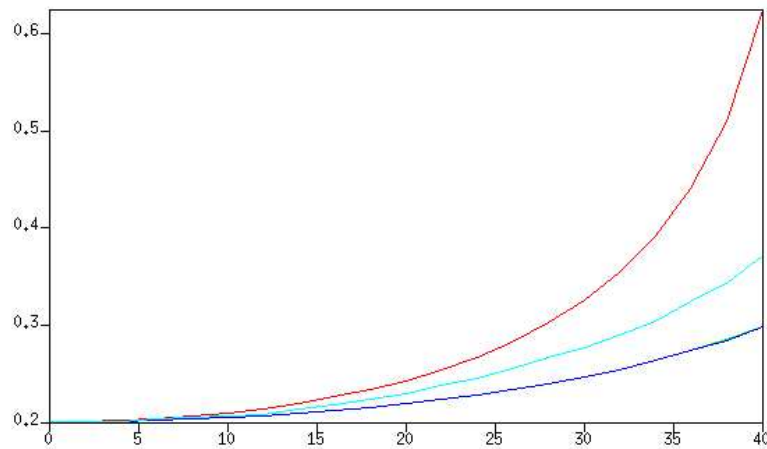


FIG. 5.4 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.

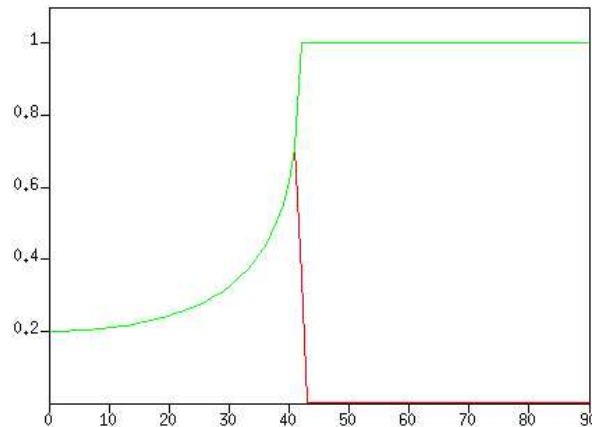


FIG. 5.5 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour le milieu exact ($c_{r,1} = c_1 < c_{r,2} = c_2$). En vert, le \ln modifié (égal au théorique), en rouge le coefficient de *J. Le Rousseau* (avec le “taper”).

niveau de l'interface. La figure 5.5 représente les valeurs du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence. Les résultats sont satisfaisants. On observe toutefois un décrochement au niveau de la courbe de r_{approx} qui vient de l'utilisation d'une fonction d'atténuation (ou taper) sur laquelle nous reviendrons plus loin (§5.6).

La figure 5.6 est associée au modèle présenté au §5.4.2. Elle illustre les limites de la méthode GSP lorsque la vitesse de référence diffère de la vitesse réelle. Le plus remarquable est de voir que le coefficient de réflexion n'est plus naturellement limité. Ce comportement est lié aux développements de Taylor en puissance de $1/\gamma_r$ qui, à mesure que γ_r est proche de 0, prennent des valeurs de plus en plus grandes, *à fortiori* si l'ordre d'approximation est élevé. Ce problème se confirme lorsqu'on considère un modèle où la vitesse de référence n'est pas constante et diffère aussi de la vitesse réelle (Fig. 5.7).

Le cas du point de tir met en évidence un problème qui est lié pour l'essentiel au traitement des singularités de $1/\gamma_r$. Afin de rectifier les résultats des figures 5.6 et 5.7, il nous semble préférable de nous attarder sur la prise en compte de ces singularités. Nous reviendrons ensuite sur le cas du point de tir.

5.6 Traitement des singularités

Dans ce paragraphe, on s'attarde sur un point délicat dont nous avons omis de parler jusqu'ici et qui concerne l'intégration de γ_r^{-1} (et d'éventuellement $(\gamma_r^{-1})^m$, $m \geq 2$) au voisinage des singularités. Ces singularités sont situées au bord du cône de propagation et sont décrites algébriquement par la relation : $\frac{|k'|^2}{\omega^2} = \frac{1}{c_r^2}$. Numériquement, on doit intégrer les singularités dans un proche voisinage du bord du cône. Pour cela, on procède à des intégrations dans le plan complexe qui reviennent à contourner le point singulier ainsi qu'un proche voisinage. Cela a pour effet de trans-

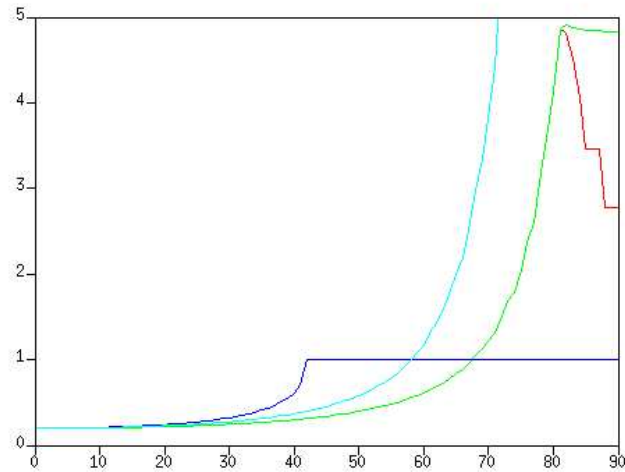


FIG. 5.6 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour le milieu avec une vitesse de référence constante ($c_{r,1} = c_1 = c_{r,2} < c_2$). En vert, le \ln modifié à l'ordre 1, en turquoise à l'ordre 2, en rouge le coefficient de J. Le Rousseau (avec le “taper”), et en bleu la valeur théorique.

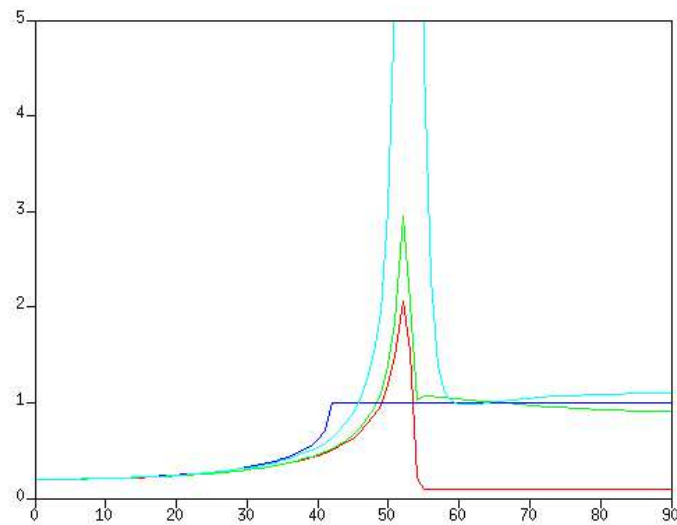


FIG. 5.7 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour le milieu avec une vitesse de référence non constante ($c_{r,1} = c_1 < c_{r,2} < c_2$). En vert, le \ln modifié à l'ordre 1, en turquoise à l'ordre 2, en rouge le coefficient de J. Le Rousseau (avec le “taper”), et en bleu la valeur théorique.

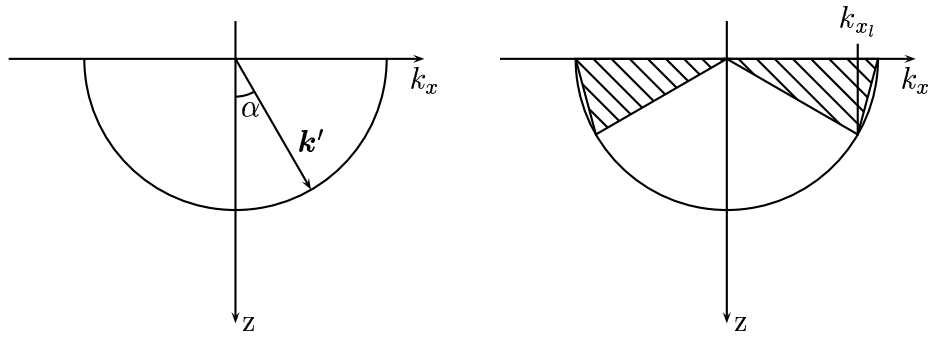


FIG. 5.8 –

former γ_r en un nombre complexe dont la partie réelle peut générer des instabilités numériques. On diminue ce désagrément en utilisant une fonction d'atténuation (ou taper).

5.6.1 Contour dans le plan complexe

Jusqu'ici, nous avons omis de considérer la difficulté causée par les valeurs de \mathbf{k}' pour lesquelles γ_0 s'annule et correspondent donc à des singularités pour le symbole de l'opérateur de réflexion. Dans le cas 2D, on contourne les singularités en passant dans le plan complexe, ce qui est assez courant dès qu'il s'agit d'intégrer des nombres d'ondes [51].

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1.2 que l'on fait un développement de Taylor de γ_0 en fonction d'un petit paramètre $\frac{\delta}{\gamma_r}$. Le symbole γ_0 s'écrit donc comme une série en $\frac{1}{\gamma_r}$, et γ_r peut s'annuler lorsque $\frac{|\mathbf{k}'|}{\omega} = \frac{1}{c_r}$. Numériquement, le nombre d'onde est proportionnel à l'inverse du pas de discrétisation en espace, dont le choix est dicté par le théorème de Nyquist qui relie la valeur de Δx à la fréquence maximale k_{max} du signal à reproduire (on doit en fait choisir $\Delta x \leq \frac{1}{2k_{max}}$). Inversement, plus on choisit Δx petit (c'est-à-dire on cherche à améliorer la qualité des résultats), plus k_{max} est grand. Ainsi, sauf cas exceptionnel, la valeur singulière est atteinte et même dépassée.

On pourrait éviter cette singularité en travaillant dans un intervalle plus petit ne contenant pas les valeurs singulières. Cela revient, soit à augmenter Δx et donc à dégrader la précision des calculs, soit à stopper les calculs pour une certaine valeur $k_l < k_{max}$ où k_{max} correspond à la valeur singulière. La figure 5.8 représente à gauche le cas complet et à droite le cas où on travaille dans un intervalle plus petit. On voit très clairement qu'on rétrécit le cône de propagation ce qui modifie le front d'onde et introduit donc une erreur non négligeable. Une autre approche, familière pour le calcul d'intégrales singulières, consiste à effectuer un passage dans le plan complexe de façon à contourner la valeur singulière (voir Figure 5.9 où on a noté

$\frac{\tilde{\mathbf{k}}'}{\omega} = \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega} + i\sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{c_r} - \frac{|\mathbf{k}'|}{\omega}\right)^2}$). Il faut alors trouver comment choisir le rayon s

de façon à ne pas trop modifier la valeur de γ_r tout en s'éloignant suffisamment de la valeur singulière. L'approche de J. Le Rousseau consiste à perturber le réel $\frac{|k'|}{\omega}$ en lui adjoignant une partie imaginaire. On remplace donc $\frac{|k'|}{\omega}$ par un nombre complexe appartenant au cercle centré en $\frac{1}{c_r}$ et de rayon s . Le symbole de γ_r a alors l'expression suivante :

$$\text{pour } \frac{1}{c_r} - s \leq \frac{|k'|}{\omega} \leq \frac{1}{c_r} + s, \quad \gamma_r = \sqrt{\frac{1}{c_r^2} - \left(\frac{|k'|}{\omega} + i \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{c_r} - \frac{|k'|}{\omega} \right)^2} \right)^2}.$$

Le rayon s est choisi de façon arbitraire par J. Le Rousseau. Nous avons adopté une autre approche qui consiste à définir un angle limite α_l au-delà duquel on utilise le plan complexe. Cet angle limite s'exprime en fonction d'une fréquence limite k'_l par la relation

$$\sin \alpha_l = \frac{c_r |k'_l|}{\omega}$$

et on prend pour rayon

$$s = \frac{1}{c_r} - \frac{|k'_l|}{\omega}.$$

Le contour n'est donc activé que lorsque $|k'| > |k'_l|$ et on sait de toute façon que la précision des résultats n'est pas aussi bonne au-delà de l'angle limite α_l .

Le phénomène de propagation est associé aux fréquences telles que γ_r est un réel. En théorie, on ne doit pas considérer le cas où γ_r est un imaginaire pur, ce qui correspond aux fréquences dans la région elliptique. C'est pourquoi on multiplie γ_r par une fonction tronquante (ou "taper") qui permet d'atténuer les perturbations générées par la partie imaginaire de γ_r créée par le contour puis de les éliminer dès que γ_r est imaginaire pur.

Remarque 10. L'angle limite α_l est défini dans le milieu de référence puisqu'il est fonction de c_r . Par construction, $c_r \leq c$ et ainsi, l'angle limite associé au milieu de référence est toujours plus petit que l'angle limite associé au milieu réel.

Remarque 11. Dans [27] (voir page 77-78), on utilise différents contours qui seraient peut-être plus stables numériquement. Nous n'avons pas eu le temps de le tester. Cela fera l'objet d'un travail futur.

5.6.2 Influence du contour sur la réflexion

En cherchant à vérifier si l'amplitude en fonction de l'offset (AVO) est correcte, nous nous sommes aperçus que le passage dans le plan complexe avait des effets néfastes sur les résultats.

Afin d'illustrer ce problème, considérons le modèle bi-couche standard du §5.4.1 où la vitesse de référence coïncide avec la vitesse réelle. Dans ce cas, le coefficient de réflexion s'écrit de manière exacte :

$$r_r(z_0, k_x/\omega) = \frac{\gamma_r(z^-, k_x/\omega) - \gamma_r(z^+, k_x/\omega)}{\gamma_r(z^+, k_x/\omega) + \gamma_r(z^-, k_x/\omega)}.$$

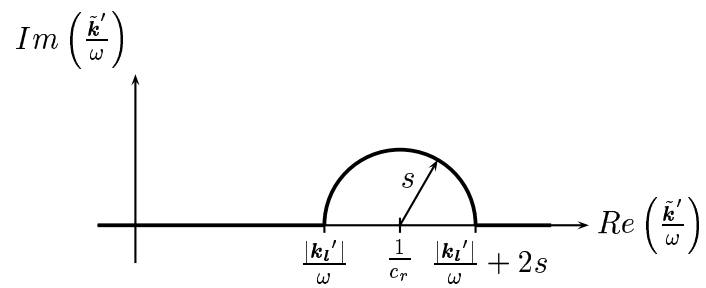


FIG. 5.9 – Contour dans le plan complexe

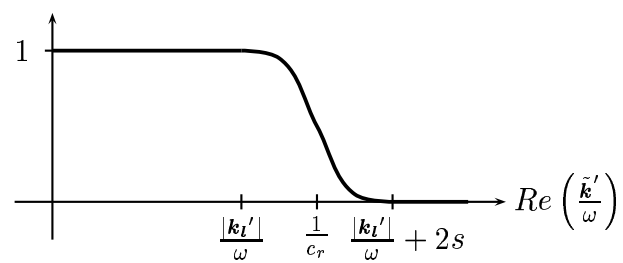


FIG. 5.10 – Taper lié au contour.

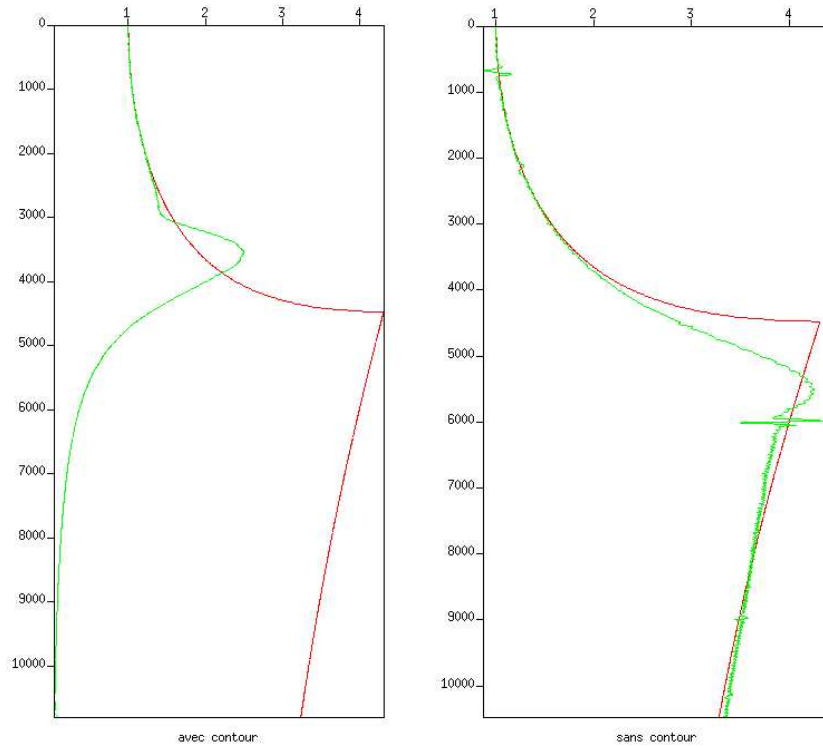


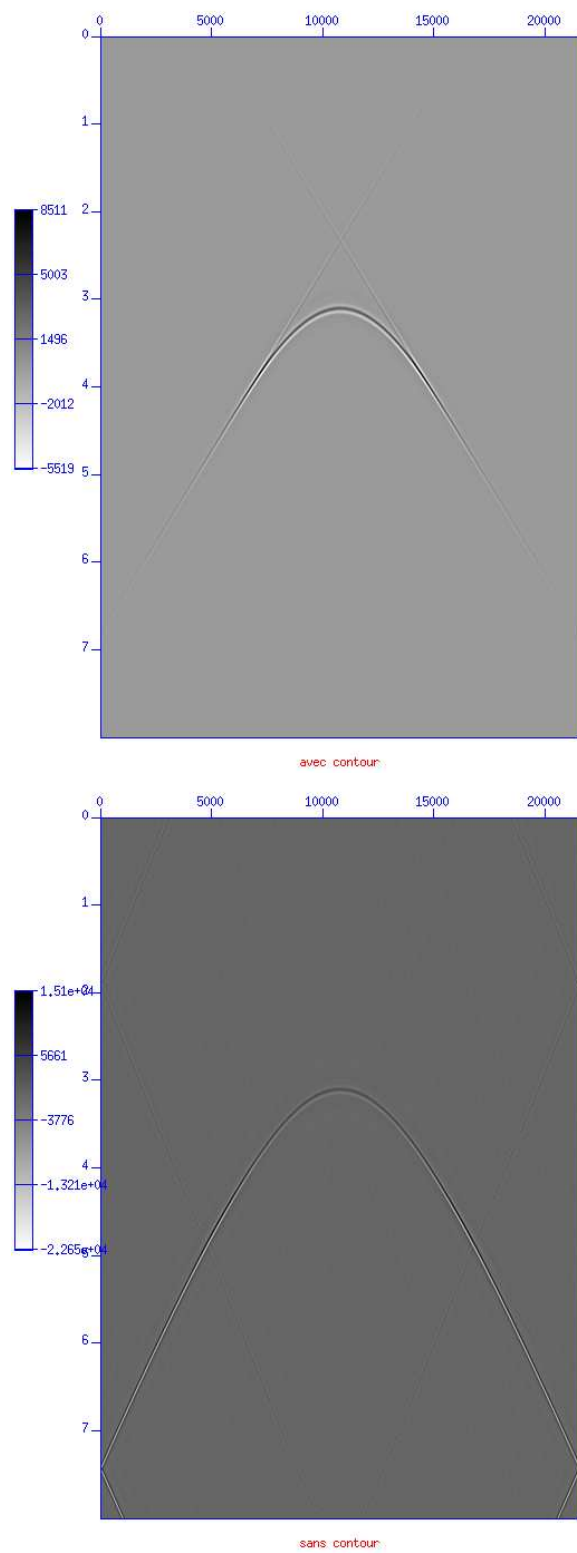
FIG. 5.11 – en rouge la courbe théorique, en vert celle obtenue par le calcul

Pour qu'il y ait une singularité, il faut que γ_r s'annule en z^- et en z^+ ce qui est impossible. On peut donc se passer d'utiliser un contour dans le plan complexe. Sur la figure 5.11 (qui représente l'AVO), on peut voir combien le contour dégrade les résultats. Sur la figure 5.12, on visualise la diffractée limite ainsi que la rotation de phase. Ce phénomène est physique [1] et il est associé à l'angle critique α_c (voir page 96 pour la définition). Du point de vue de la réflexion, le coefficient est réel tant que $\alpha < \alpha_c$ et devient complexe de module égal à 1 dès que $\alpha > \alpha_c$. Il y a alors création de l'onde diffractée limite (souvent appelée head wave). Ce premier exemple montre donc que l'utilisation d'un contour élimine un phénomène physique que la modélisation devrait mettre en évidence, et le remplace par un événement parasite de forte amplitude.

Considérons maintenant le milieu défini au §5.4.2. L'expression du coefficient de réflexion exact est analogue à celle du coefficient en milieu tabulaire exact (voir §5.4.1) et la méthode GSP en donne une valeur approchée :

$$r_{modif,1}^{ln} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right).$$

L'exemple précédent incite à considérer des valeurs de $\alpha > \alpha_c$. Mais on peut observer que le phénomène physique associé n'a aucune chance d'être modélisé car $r_{modif,1}^{ln}$ reste toujours réel, à l'exception des fréquences se situant sur le contour. Il faut noter que le passage du coefficient de réflexion dans le plan complexe est artificiel.

FIG. 5.12 – *Sismogrammes.*

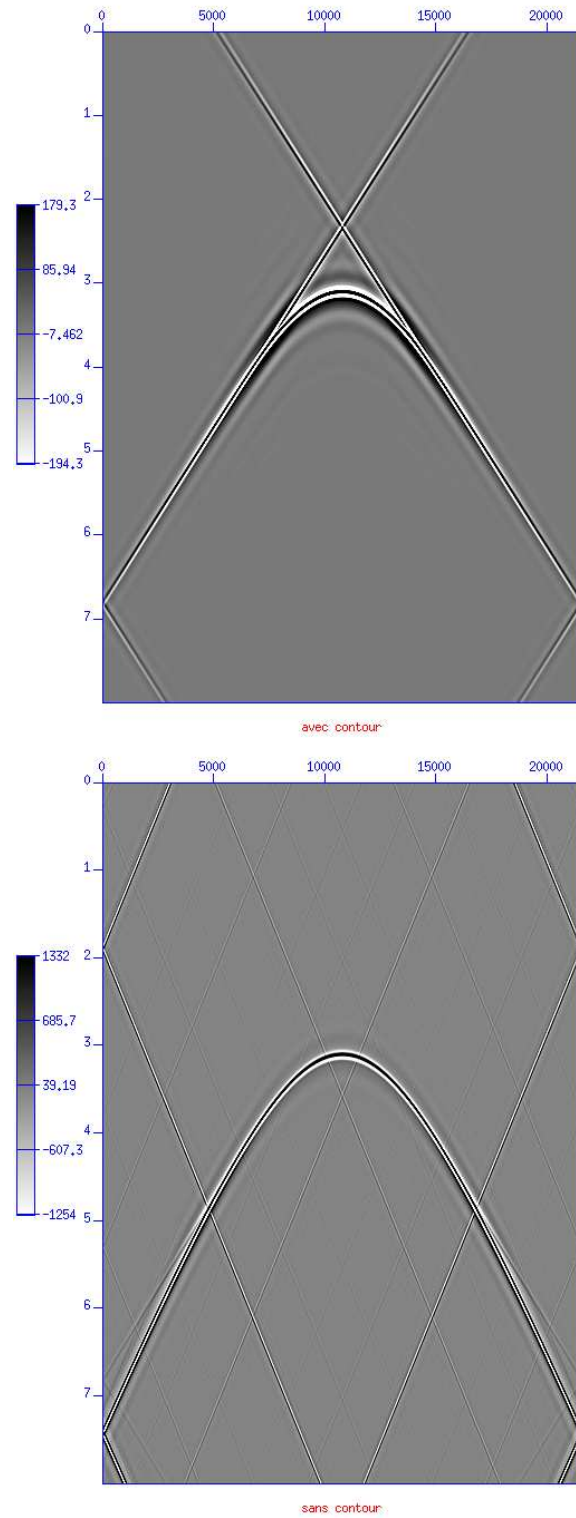


FIG. 5.13 – Sismogrammes avec un gain augmenté qui permet de réduire les valeurs maximales

En aucun cas, on ne recrée la diffractée limite. De plus, le coefficient approché peut devenir très grand si α est proche de 90° , puisque dans ce cas le coefficient n'est pas naturellement limité (ce qui se produit dans le cas exact, avec l'apparition de la "head wave"). Ce comportement est dû aux termes du développement de Taylor qui sont en puissance de $\frac{1}{\gamma_r}$, et lorsque γ_r s'annule, on tend vers l'infini, d'autant plus vite que l'ordre est élevé. Afin de limiter cet inconvénient, on se propose de contrôler le phénomène de divergence et de forcer le coefficient à valoir au maximum 1. Pour cela, reprenons le calcul de r_{modif}^{ln} . D'après (5.23) et (5.24), on a :

$$\begin{aligned}
-\Delta z r_{modif}^{ln}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) &= \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} - \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \\
&+ \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\
&- \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \\
&+ \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{\gamma_r(z, \mathbf{k}'/\omega)^{2(N+1)}} \right)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Et réutilisant les notations du §5.2, on veut donc que :

$$|\mathcal{F}(-\Delta z R_{0,0} u^{inc}(\cdot, z, \omega))(\mathbf{k}')| = C^{refl}(z, \mathbf{k}'/\omega) |\widehat{u}^{inc}(z, \mathbf{k}', \omega)| \text{ et } C^{refl}(z, \mathbf{k}'/\omega) \leq 1.$$

Or l'opérateur de réflexion appliqué au champ incident s'écrit sous la forme :

$$R_{0,0} u^{inc}(\mathbf{x}', z, \omega) = \int e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}'} \sigma_{R_{0,0}}^{\mathbf{k}'}(z, \mathbf{k}'/\omega) \mathcal{F}(\sigma_{R_{0,0}}^{\mathbf{x}'}(\cdot, z) u^{inc}(\cdot, z, \omega))(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'$$

qui s'exprime donc comme une transformée de Fourier inverse. Le coefficient de réflexion est donné par la relation :

$$\left| -\Delta z \sigma_{R_{0,0}}^{\mathbf{k}'} \mathcal{F}(\sigma_{R_{0,0}}^{\mathbf{x}'} u^{inc}) \right| = C^{refl} |\widehat{u}^{inc}|$$

On obtient ainsi la condition :

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{F} \left(\left(\frac{c(\cdot, z^+) - c(\cdot, z^-)}{c(\cdot, z^+) + c(\cdot, z^-)} - \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \right) u^{inc}(\cdot, z, \omega) \right) (\mathbf{k}') \right. \\
&- \frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \widehat{u}^{inc}(z, \mathbf{k}', \omega) + \frac{1}{4\Delta z} \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{F}(\delta(\cdot, z^+)^j u^{inc}(\cdot, z, \omega))(\mathbf{k}')}{j} \\
&\times \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) - \frac{1}{4\Delta z} \sum_{j=1}^N \frac{\mathcal{F}(\delta(\cdot, z^-)^j u^{inc}(\cdot, z, \omega))(\mathbf{k}')}{j} \\
&\times \left. \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \right| \leq |\widehat{u}^{inc}(z, \mathbf{k}', \omega)|.
\end{aligned}$$

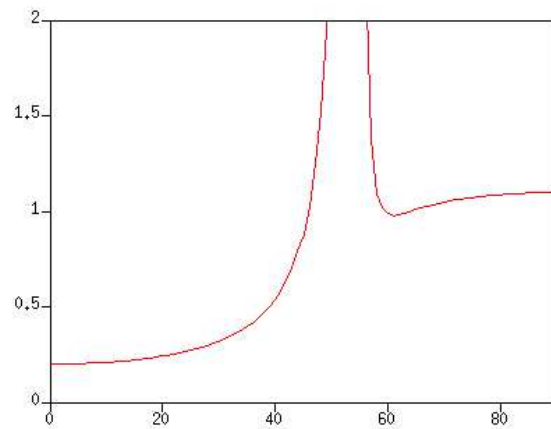


FIG. 5.14 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour le milieu avec une vitesse de référence non constante ($c_{r,1} = c_1 < c_{r,2} < c_2$). Ln modifié à l'ordre 2 sans la condition précédente

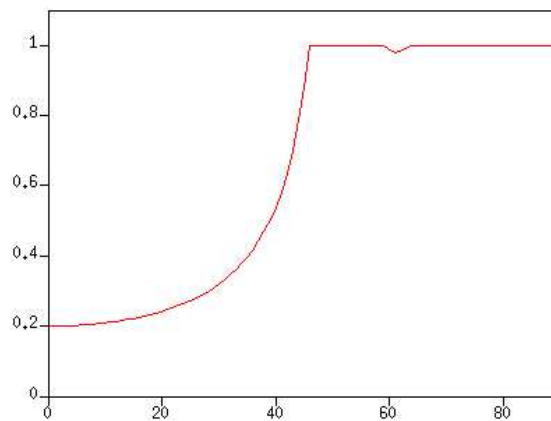


FIG. 5.15 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour le milieu avec une vitesse de référence non constante ($c_{r,1} = c_1 < c_{r,2} < c_2$). Ln modifié à l'ordre 2 avec la condition précédente

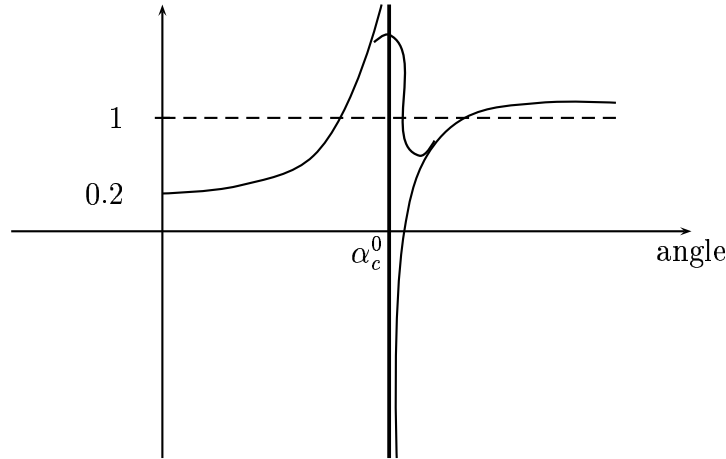


FIG. 5.16 –

Afin de tester l'efficacité de cette condition, on reprend le cas du point de tir et on représente sur les figures 5.14 et 5.15 l'ancien et le nouveau (avec condition) coefficient de réflexion. On observe visiblement l'amélioration des résultats. Sur la figure 5.15, on observe un petit décrochement qui est aussi présent sur la figure 5.14 mais moins visible du fait de l'échelle. Ce phénomène n'apparaît pas lorsque le milieu de référence est constant. On observe que son amplitude est accentuée à l'ordre 1 par rapport à l'ordre 2. Afin d'expliquer ce phénomène, on revient à l'expression du coefficient de réflexion, en se plaçant dans le cas précédent :

$$\begin{aligned}
-\Delta z r_{\text{modif}}^{\text{ln}}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) &= \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} - \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \\
&+ \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega)}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'/\omega)} \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z^+, \mathbf{k}'/\omega))^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right)
\end{aligned} \quad (5.27)$$

Le phénomène de divergence s'observe lorsque γ_r^+ s'annule. Au cas $\gamma_r^+ = 0$, on associe un angle critique α_c^0 donné par la relation $\sin \alpha_c^0 = \frac{c^-}{c_r^+}$. On voit donc que si $c_r^+ > c^-$, $\alpha_c^0 < 90^\circ$ et

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_c^0} (-\Delta z r_{\text{modif}}^{\text{ln}}) = +\infty \\ \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_c^0} (-\Delta z r_{\text{modif}}^{\text{ln}}) = -\infty \end{cases}$$

Le contour a pour effet d'éliminer la divergence terme à terme en raccordant les deux branches de solutions dans un voisinage de l'angle critique (voir Figure 5.16)

L'angle critique dans le milieu de référence est supérieur à celui dans le milieu réel ($\frac{c^-}{c_r^+} \leq \frac{c^-}{c_r^-}$). Le coefficient de réflexion vaudra donc 1 au delà de α_c^0 . De plus ce problème n'a lieu que lorsque $\delta(\mathbf{x}', z^+) \neq 0$, puisque δ multiplie les termes $\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}}$,

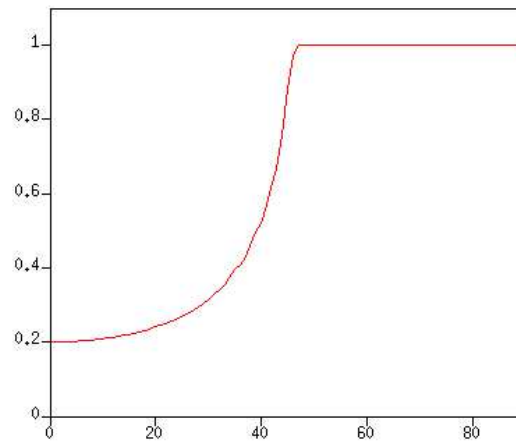


FIG. 5.17 – Coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour le milieu avec une vitesse de référence non constante ($c_{r,1} = c_1 < c_{r,2} < c_2$). Ln modifié à l'ordre 2 avec les conditions précédentes

d'après la formule (5.28). Donc pour éviter le décrochement défini juste avant, on va rajouter une condition à la précédente : si $\delta(\mathbf{x}', z^+) \neq 0$ et $\alpha > \alpha_c^0$, alors le coefficient vaut 1. La figure 5.17 représente le coefficient de réflexion corrigé.

Chapitre 6

Résultats numériques

6.1 Un premier cas test

Un des premiers termes du contrat passé avec Total était de traduire le code de J.Le Rousseau en fortran 90 et d'y ajouter quelques fonctionnalités, comme rendre le code modulaire (module de propagation, de réflexion etc... ce qui permet de tester plus efficacement différents propagateurs par exemple), des enregistrements des sismogrammes pour chaque ordre d'arrivée (arrivée primaire seule, arrivée primaire et le premier multiple, arrivée primaire et les n multiples).

Ensuite, il s'est agi de faire tourner le code sur un cas test 2D correspondant au modèle GXT. La source est un point de tir (dérivée seconde d'une gaussienne en temps) localisé au kilomètre 0. Les récepteurs recouvrent toute la surface $\{z = 0\}$. La figure 6.1 représente les premiers résultats obtenus. On observe un sismogramme excessivement bruité de telle sorte que toute analyse semble impossible.

Nous avons alors décidé de considérer des modèles de vitesse simplifiés pour lesquels l'analyse des résultats est plus facile, d'autant plus que l'on peut les utiliser dans un code aux différences finies, le code Twist++, développé par Adam Cherett du Geoscience Center of Research de Total à Londres. Ce code va nous servir de référence en matière de calcul, durant tout le long de ce chapitre.

Le test le plus simple concerne le cas du modèle bi-couche. La figure 6.2 montre un sismogramme pollué par un événement parasite de forte amplitude au dessus du front d'onde. De plus, si on compare les temps d'arrivée obtenus par Twist++ et le GSP, on voit que les calculs du GSP ne sont plus corrects dès que la distance entre source et récepteur est grande (large offset). Pour ce cas simple, les problèmes proviennent de l'opérateur de réflexion, et plus particulièrement du contour et du taper utilisés (voir fin du chapitre 5). Le contour est utile pour éviter la singularité induite par les termes du développement de Taylor alors que le taper atténue la valeur de ces mêmes termes dans le contour pour éviter d'avoir des coefficients de réflexion trop grands.

Dans le travail pionnier de J.Le Rousseau [61], l'approche GSP a principalement été validée pour le propagateur par des snapshots.

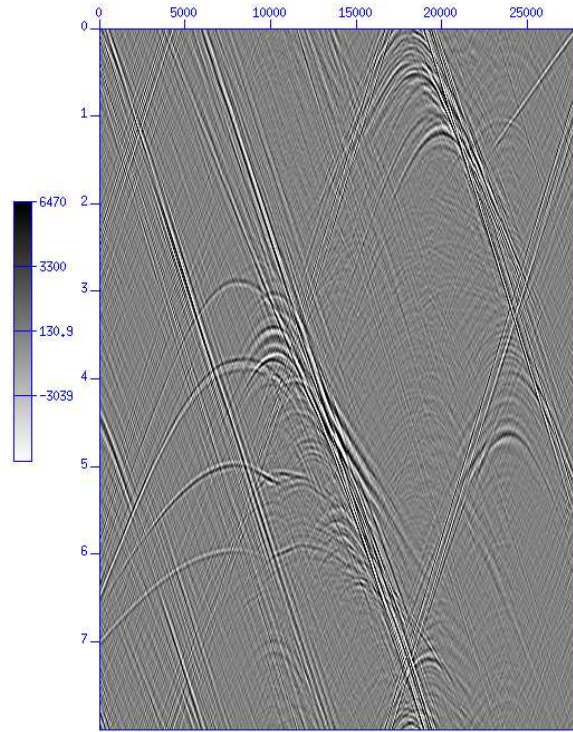


FIG. 6.1 – Premier test sur le GXT, avec un point de tir au point 0. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

Dans la suite, nous allons affiner notre analyse des résultats dans le but d'améliorer les figures 6.1 et 6.2.

6.2 Calcul exact

Jusqu'à présent, pour séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' , on a fait intervenir un milieu de référence dont la vitesse c_r ne dépend que de z , puis on utilise une approximation de Taylor pour tenir compte des variations latérales de vitesse. On a pu observer (notamment dans l'opérateur de réflexion, Chapitre 5) que ces développements introduisaient des instabilités (division par γ_r qui peut être proche de 0). Dans le cas où le modèle de vitesse comporte peu de valeurs différentes, on peut s'affranchir du milieu de référence, et donc des approximations de Taylor.

On rappelle l'expression du symbole de l'opérateur Γ_0 :

$$\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \sqrt{\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}} \quad (6.1)$$

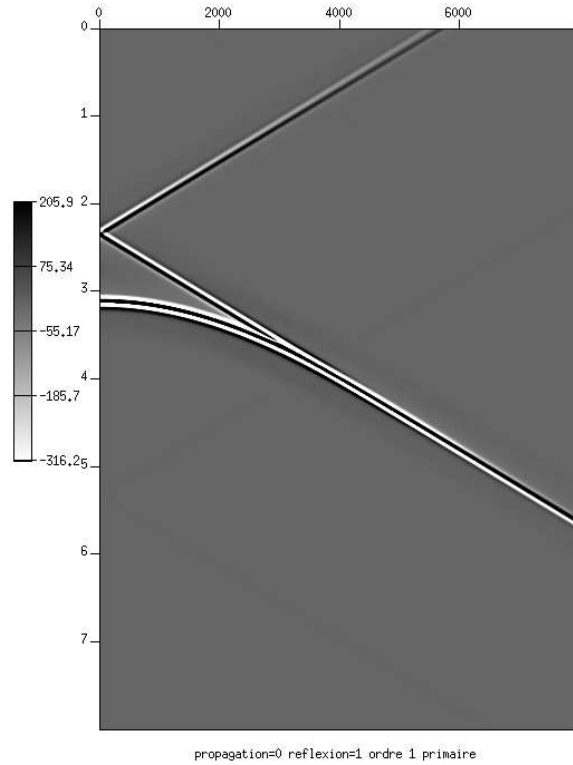


FIG. 6.2 – Test sur le modèle à interface plane. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

Pour un modèle de vitesse qui comporte n valeurs différentes de vitesse $(c_j)_{j=1,\dots,n}$, on construit une table pour γ_0 , i.e. on calcule

$$\gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega) = \sqrt{\frac{1}{c_j^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2}}.$$

On définit aussi une fonction φ_j telle que :

$$\varphi_j(\mathbf{x}', z) = \begin{cases} 1 & \text{si } c(\mathbf{x}', z) = c_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}', z) \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega) \quad (6.2)$$

La somme est en fait artificielle, puisque les φ_j sont à support disjoint. On a donc :

$$\forall(\mathbf{x}', z), \exists! j \in \{1, \dots, n\} / \gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega) \quad (6.3)$$

On voit de plus que dans (6.2) les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' sont bien séparées.

6.2.1 L'opérateur de propagation

Le champ propagé de $z - \delta z$ à z est donné par

$$G_{\pm}^0(z - \delta z, z)\psi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} e^{\mp i\omega\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)\Delta z} \widehat{\psi}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}',$$

En remplaçant γ_0 par (6.2) et du fait de la propriété (6.3), on obtient :

$$G_{\pm}^0(z - \delta z, z)\psi = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}', z) \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} e^{\mp i\omega\gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega)\Delta z} \widehat{\psi}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'.$$

Ce propagateur est exact et sera appelé dans la suite GSPe.

6.2.2 L'opérateur de décomposition

D'après (6.2) et (6.3), le symbole principal de Γ_0^{-1} devient :

$$\gamma_0^{-1}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}', z) (\gamma_0^j)^{-1}(\mathbf{k}'/\omega).$$

6.2.3 L'opérateur de réflexion

Son symbole est $r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \frac{1}{2}\gamma_0^{-1}(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)\partial_z\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)$. On peut écrire r_0 sous la forme suivante :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) = \frac{1}{2}\partial_z \ln \gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega)$$

Après avoir approché la dérivée en z , on obtient :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \frac{1}{2\Delta z} (\ln \gamma_0(\mathbf{x}', z^+, \mathbf{k}'/\omega) - \ln \gamma_0(\mathbf{x}', z^-, \mathbf{k}'/\omega))$$

On remplace γ_0 par (6.2), et on obtient :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \frac{1}{2\Delta z} \left(\ln \left(\sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}', z^+) \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega) \right) - \ln \left(\sum_{j=1}^n \varphi_j(\mathbf{x}', z^-) \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega) \right) \right)$$

Grâce aux propriétés des fonctions φ_j , on obtient :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \frac{1}{2\Delta z} \sum_{j=1}^n ((\varphi_j(\mathbf{x}', z^+) - \varphi_j(\mathbf{x}', z^-)) \ln \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega)).$$

On peut aussi approcher r_0 de façon plus basique :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \frac{\gamma_0(\mathbf{x}', z^+, \mathbf{k}'/\omega) - \gamma_0(\mathbf{x}', z^-, \mathbf{k}'/\omega)}{\Delta z (\gamma_0(\mathbf{x}', z^+, \mathbf{k}'/\omega) + \gamma_0(\mathbf{x}', z^-, \mathbf{k}'/\omega))}$$

Puis on remplace γ_0 par (6.2), et on obtient :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \frac{\sum_{j=1}^n ((\varphi_j(\mathbf{x}', z^+) - \varphi_j(\mathbf{x}', z^-)) \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega))}{\Delta z \sum_{j=1}^n ((\varphi_j(\mathbf{x}', z^+) + \varphi_j(\mathbf{x}', z^-)) \gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega))}$$

Toujours grâce aux propriétés des fonctions φ_j , le symbole est approché par :

$$r_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}'/\omega) \simeq \frac{1}{\Delta z} \sum_{j=1}^n \left((\varphi_j(\mathbf{x}', z^+) - \varphi_j(\mathbf{x}', z^-)) \frac{\gamma_0^j(\mathbf{k}'/\omega)}{\sum_{l \in I(\mathbf{x}', z)} \gamma_0^l(\mathbf{k}'/\omega)} \right)$$

avec $I(\mathbf{x}', z) = \{j \leq n / \varphi_j(\mathbf{x}', z^+) + \varphi_j(\mathbf{x}', z^-) = 1\}$.

Dans la suite, cet opérateur sera appelé GSRe (Generalized Screen Reflector exact). Notons qu'il n'est pas totalement exact, puisque le symbole r_0 est une approximation du symbole exact de l'opérateur de réflexion.

6.3 Test sur les propagateurs

On commence par comparer différents propagateurs. On va considérer le Generalized Screen Propagator (GSP) classique (étudié au chapitre 4), le Paraxial (PP), et le GSRe (avec un nombre de vitesse pas trop élevé, *cf.* paragraphe précédent). Pour fixer les idées, on les compare tous à un test de référence fait avec Twist++. Soient p_{Twist} le sismogramme obtenu par Twist++ et p_{test} le sismogramme obtenu avec les différents propagateurs. L'erreur obtenue sera exprimée de la façon suivante :

$$e = \frac{\int_{\mathbf{x}'} \int_t |p_{Twist}(\mathbf{x}', t) - w(t) * p_{test}(\mathbf{x}', t)|^2 d\mathbf{x}' dt}{\int_{\mathbf{x}'} \int_t |p_{Twist}(\mathbf{x}', t)|^2 d\mathbf{x}' dt},$$

où $w(t)$ est une ondelette qui rend p_{test} comparable à p_{Twist} en termes d'amplitude et de phase (elle est calculée à partir de la minimisation d'une fonction coût). La source utilisée par Twist++ est définie pour l'équation du second ordre alors que celle du GSP est issue des équations du premier ordre. On a donc des différences d'amplitudes que l'ondelette w corrige.

En multipliant e par 100 on obtient donc que les résidus correspondent à $(100e)\%$ du graphe de référence.

Concernant le propagateur paraxial, on utilise une routine basée sur les équations paraxiales que l'on trouve dans [33].

6.3.1 Milieu homogène

Le premier test consiste à regarder ce qu'il se passe pour un milieu homogène, avec une vitesse constante égale à 1600m.s^{-1} .

	GSPe	GSP	PP
Résidu	0.45%	0.45%	14.73%

C'est le cas idéal pour le GSP. Les valeurs des résidus en attestent. Pour le propagateur paraxial, on sait que l'amplitude n'est plus correcte pour les grands angles, d'où des résidus de l'ordre de 14%. Toutefois, ainsi définis, ces résidus sont très sensibles, si bien qu'une valeur de l'ordre de 20% est encore un très bon résultat. Les sismogrammes (Figures 6.3 et 6.4) montrent la comparaison des propagateurs avec Twist++. On voit que pour le GSP (Figure 6.3), la différence avec Twist++ est très faible. Pour le paraxial (Figure 6.4), la différence est faible, quoiqu'un peu plus importante que pour le GSP.

6.3.2 Modèle bicouche à interface horizontale

	GSPe	GSP	PP
Résidu	1.15%	1.15%	3.82%

Sur les figures 6.5 et 6.6, la différence avec Twist++ est toujours faible. On peut considérer les deux propagateurs comme étant corrects.

6.3.3 Modèle bicouche à interface pentée

	GSPe	GSP ordre 1	GSP ordre 2	PP
Résidu	0.76%	64.52%	45.19%	4.26%

Pour ce modèle, le GSP n'est plus exact. Nous donnons ici les résultats pour le GSP à l'ordre 1 et 2. Cet ordre est en fait le nombre de termes que l'on prend en compte dans l'approximation de Taylor du symbole de l'opérateur Γ_0 . Ces termes du développement sont liés aux variations latérales de vitesse. Pour un modèle de vitesse avec une interface pentée, à chaque profondeur z dans la zone de l'interface, on aura des variations latérales de vitesse. En fait, comme on ne considère pas tous les termes du développement de Taylor, on ne tient pas compte correctement des variations latérales de vitesse, et par conséquent les temps d'arrivée pour les grands offsets sont légèrement en retard, ce qui se traduit par des résidus importants. On observe bien que l'on améliore la qualité des résultats en augmentant l'ordre d'approximation.

6.3.4 Conclusion

Si on se limite à l'étude de la propagation, le GSP est exact pour une interface horizontale, mais se dégrade très considérablement pour des interfaces pentées. Le propagateur paraxial apparaît comme le meilleur candidat : il est clairement moins efficace que le GSP dans le cas stratifié plan tout en donnant des résultats corrects. Il est de loin plus précis dans le cas penté.

En ce qui concerne le GSPe, on voit bien qu'il se comporte très bien dans tous les cas. Son seul inconvénient est qu'il devient vite couteux en temps de calcul si le

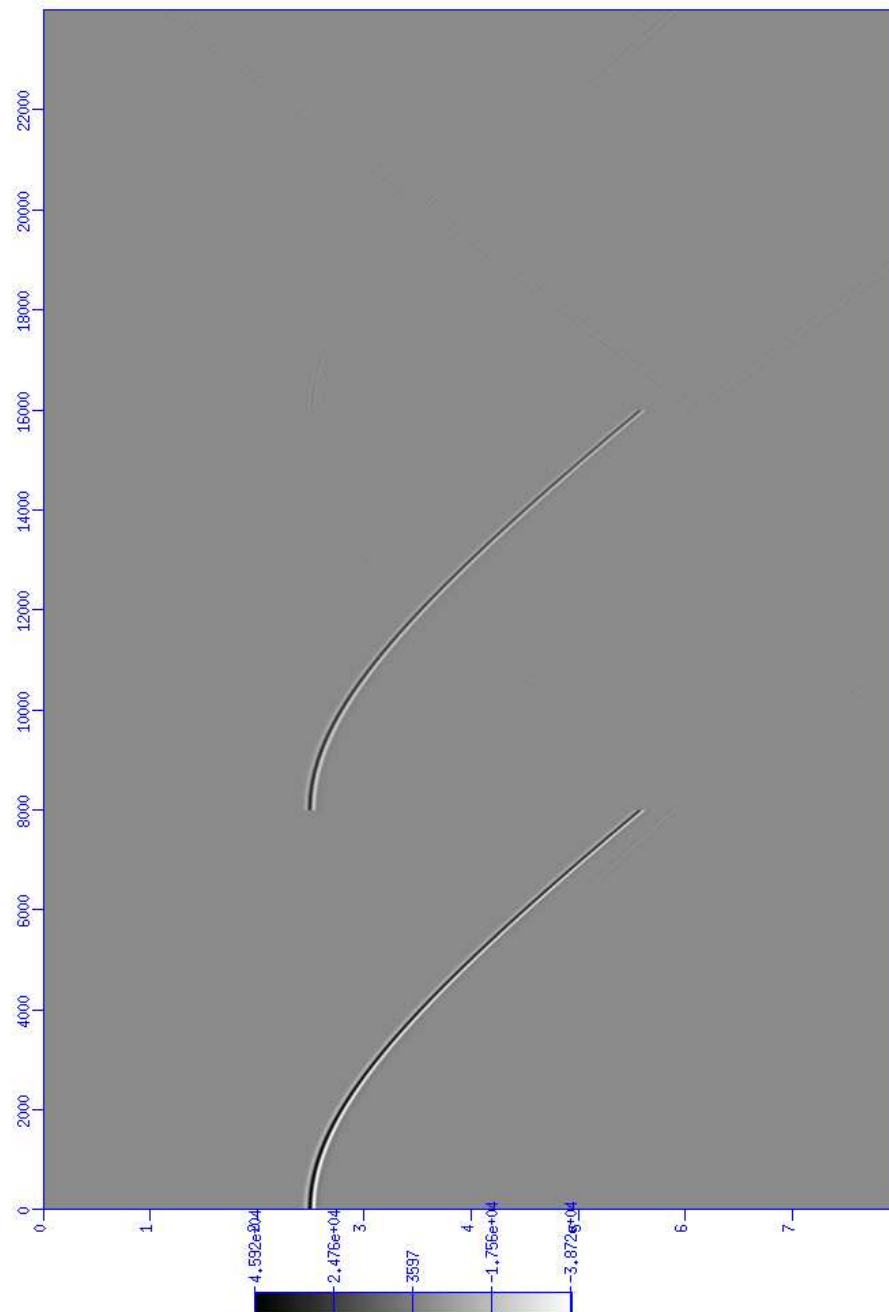


FIG. 6.3 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le GSP. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse homogène. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

modèle de vitesse contient beaucoup de valeurs différentes. Il va quand même nous servir pour les tests sur les opérateurs de réflexion dans les cas simples.

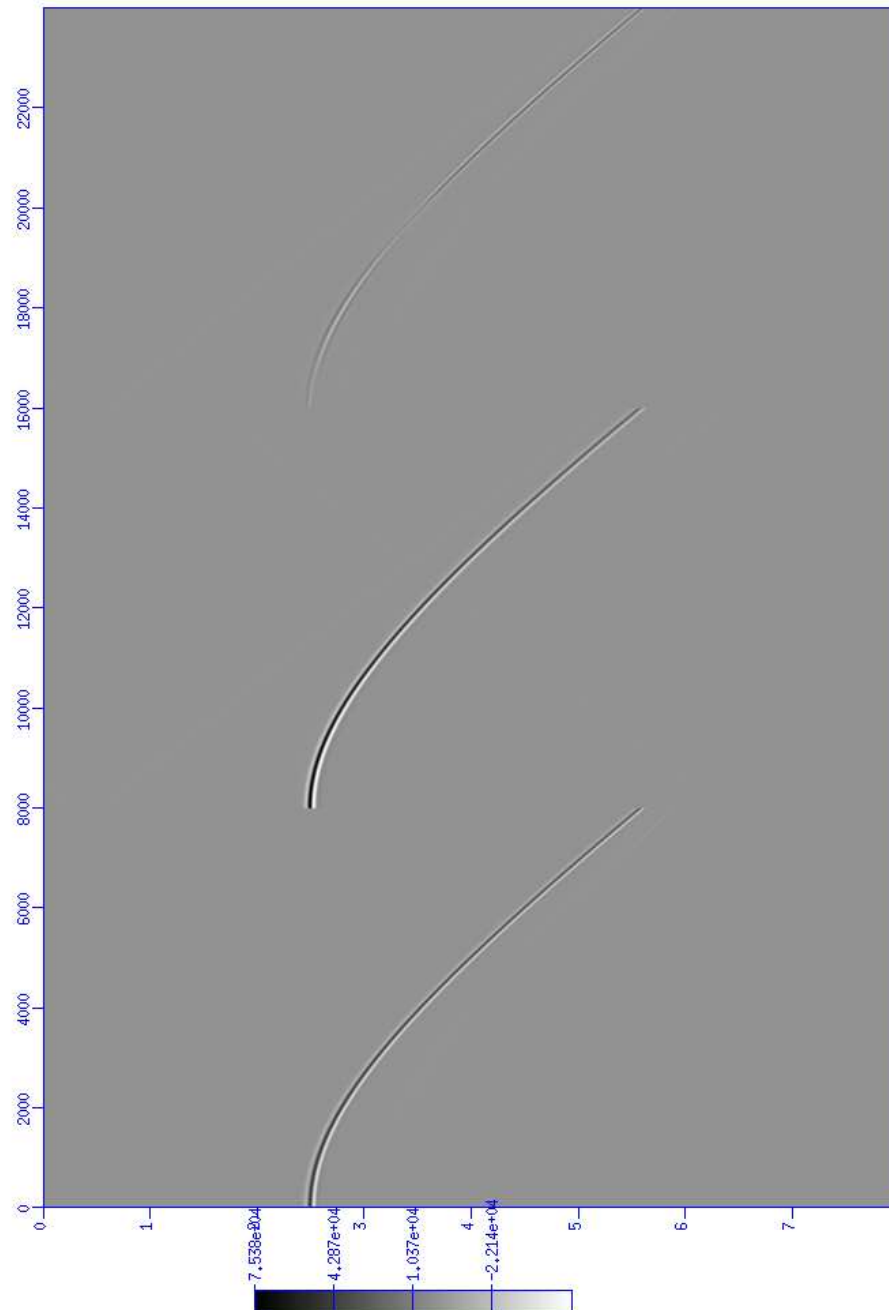


FIG. 6.4 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *Paraxial* (*PP*). A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse homogène. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

6.4 Test sur les opérateurs de réflexion

Dans ce paragraphe, on se sert donc du propagateur *GSPe* pour la propagation, et on teste différentes expressions et méthodes pour l'opérateur de réflexion. On

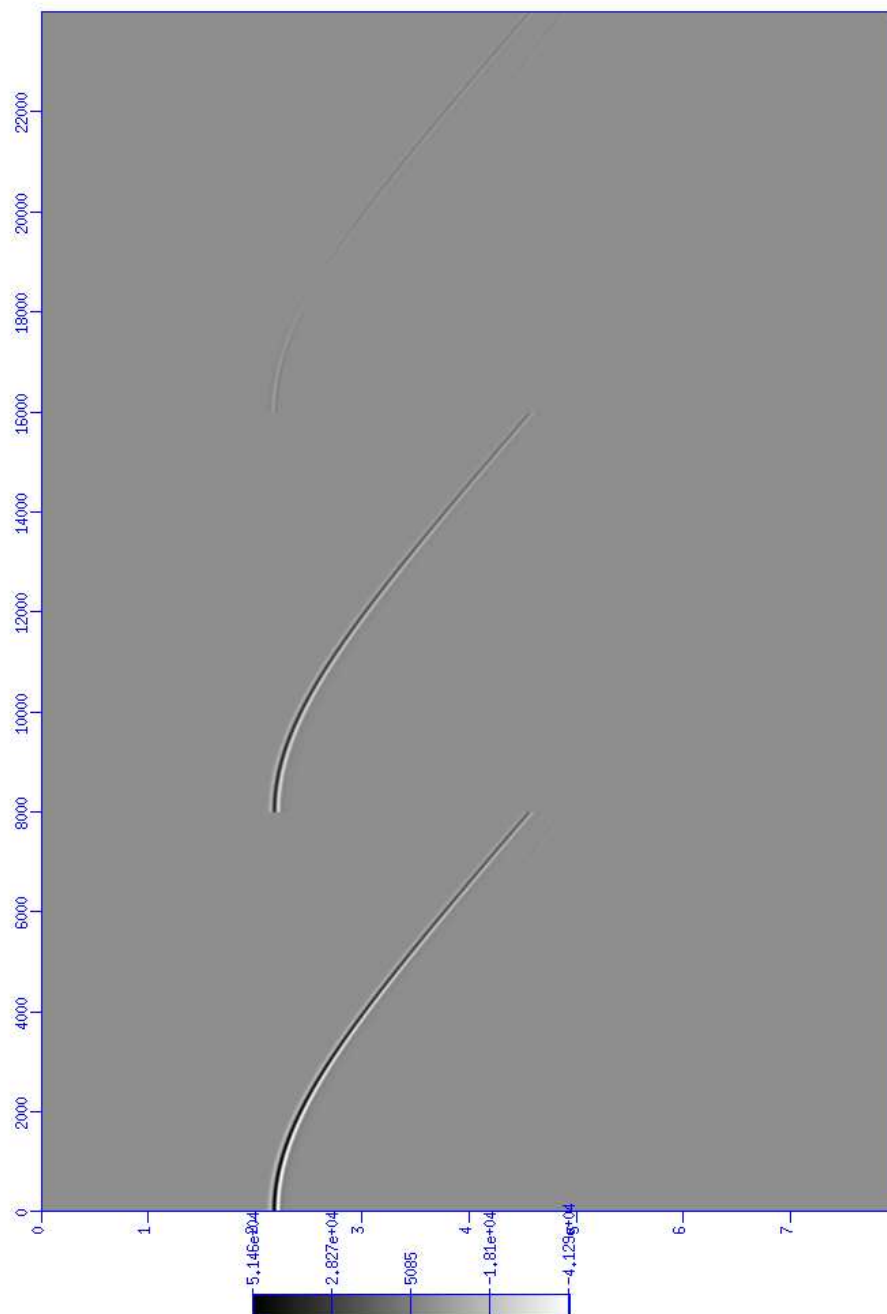


FIG. 6.5 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur GSP. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse avec l'interface horizontale. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

considère l'opérateur défini par J. Le Rousseau (GSR), celui défini dans ce mémoire à partir du logarithme (GSRln), un opérateur constant (CR) qui correspond au coefficient théorique à incidence nulle, et l'opérateur de réflexion calculé avec une

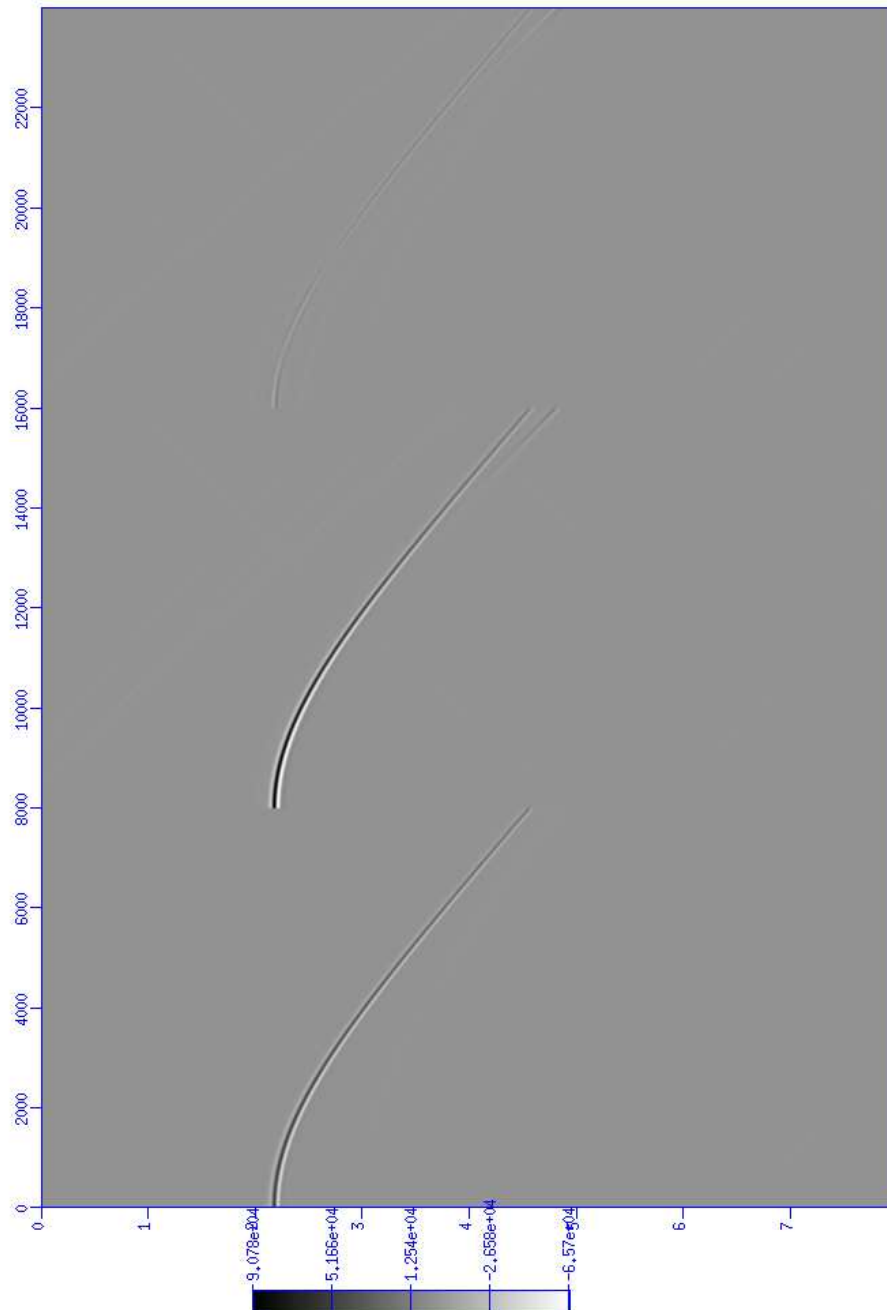


FIG. 6.6 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *Paraxial* (*PP*). A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse avec l'interface horizontale. En abscisse : la surface (x) ; en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

approximation de Born (BR). Mais comme l'approximation de Born fait intervenir un milieu de référence lisse, la vitesse doit varier continûment. Le propagateur

GSP exact ne pourra pas être utilisé (trop de valeurs de vitesse différentes). On va donc utiliser le GSP classique et comparer l'opérateur BR à l'opérateur de réflexion GSRln.

6.4.1 Modèle bicouche à interface horizontale

	GSR _e	GSR	GSRln	CR	BR
Résidu	0.89%	80.70%	0.89%	43.06%	28.72%

C'est le cas exact. Le GSR doit son mauvais résultat à l'événement qui parasite le sismogramme (voir figure 6.2). Pour l'opérateur constant, la headwave (voir chapitre 5) et le changement de phase ne peuvent pas être modélisés, d'où un mauvais résultat en terme de résidu malgré un bon sismogramme.

Pour l'approximation de Born, on obtient des résultats corrects. En fait, il est reconnu que cette approximation n'est pas exacte pour des modèles à interface plane, et on en a une illustration dans ce test.

6.4.2 Modèle bicouche à interface pentée

	GSR _e	GSR	GSRln	CR	BR
Résidu	5.90%	37.88%	36.15%	44.64%	45.41%

Dans ce cas, les opérateurs GSR et GSRln ne tiennent plus compte de la headwave (voir chapitre 5). Le changement de phase n'apparaît plus. L'opérateur GSR_e n'est plus tout à fait exact. Ceci est dû au symbole principal de l'opérateur de réflexion utilisé ici qui est le premier terme de la série définissant le symbole complet. Les symboles suivants de cette série dépendent du gradient transverse (dérivées par rapport à \boldsymbol{x}') de la vitesse, et donc tiennent aussi compte de la variation latérale de vitesse. Ces termes ne sont pas pris en compte dans ces tests car ils font intervenir des quantités qui sont proches des limites numériques (représentation des réels sur 32 bits).

Pour l'opérateur de réflexion BR, on a utilisé le GSP classique. En fait, la propagation se fait toujours dans le milieu du dessus, si bien que le GSP classique ne produit quasiment pas d'erreur. Dans les tests sur la propagation, on considèrerait aussi la propagation dans le milieu sous l'interface, et c'est là que l'erreur est la plus importante. Les sismogrammes (Figures 6.7 et 6.8) montrent que l'erreur commise est assez importante dans les deux cas, peut être un peu plus dans le cas BR.

6.4.3 Modèle 3 couches

Ce modèle simple permet de voir clairement la modélisation des multiples. C'est une application directe de l'exemple détaillé dans le chapitre 4. La propagation GSP

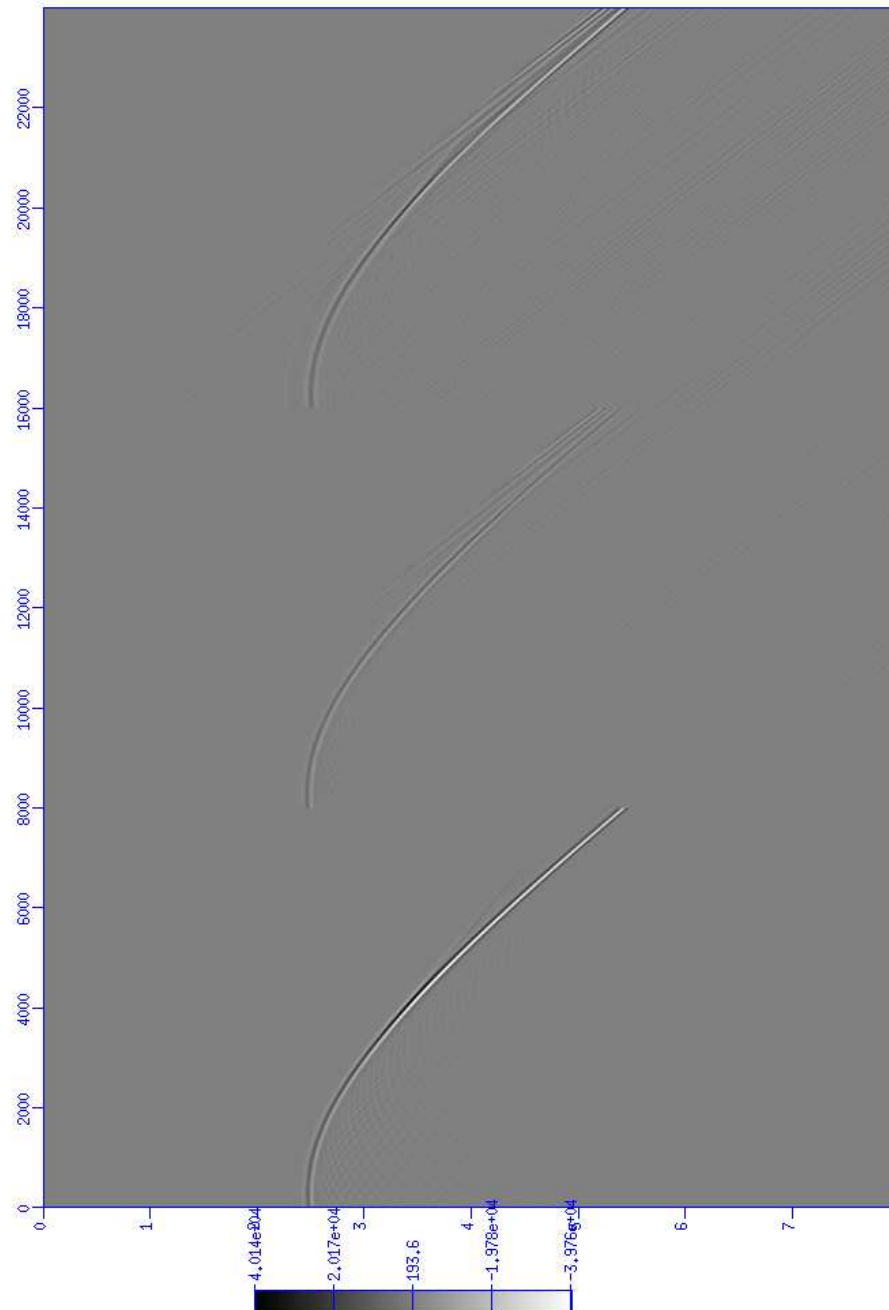


FIG. 6.7 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSP* et la réflexion *BR*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse avec l'interface pentée. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

est exacte pour cette configuration (interfaces horizontales), on va donc comparer les opérateurs de réflexion *GSR*, *GSRln* et *CR*. En terme de résidus, on obtient les

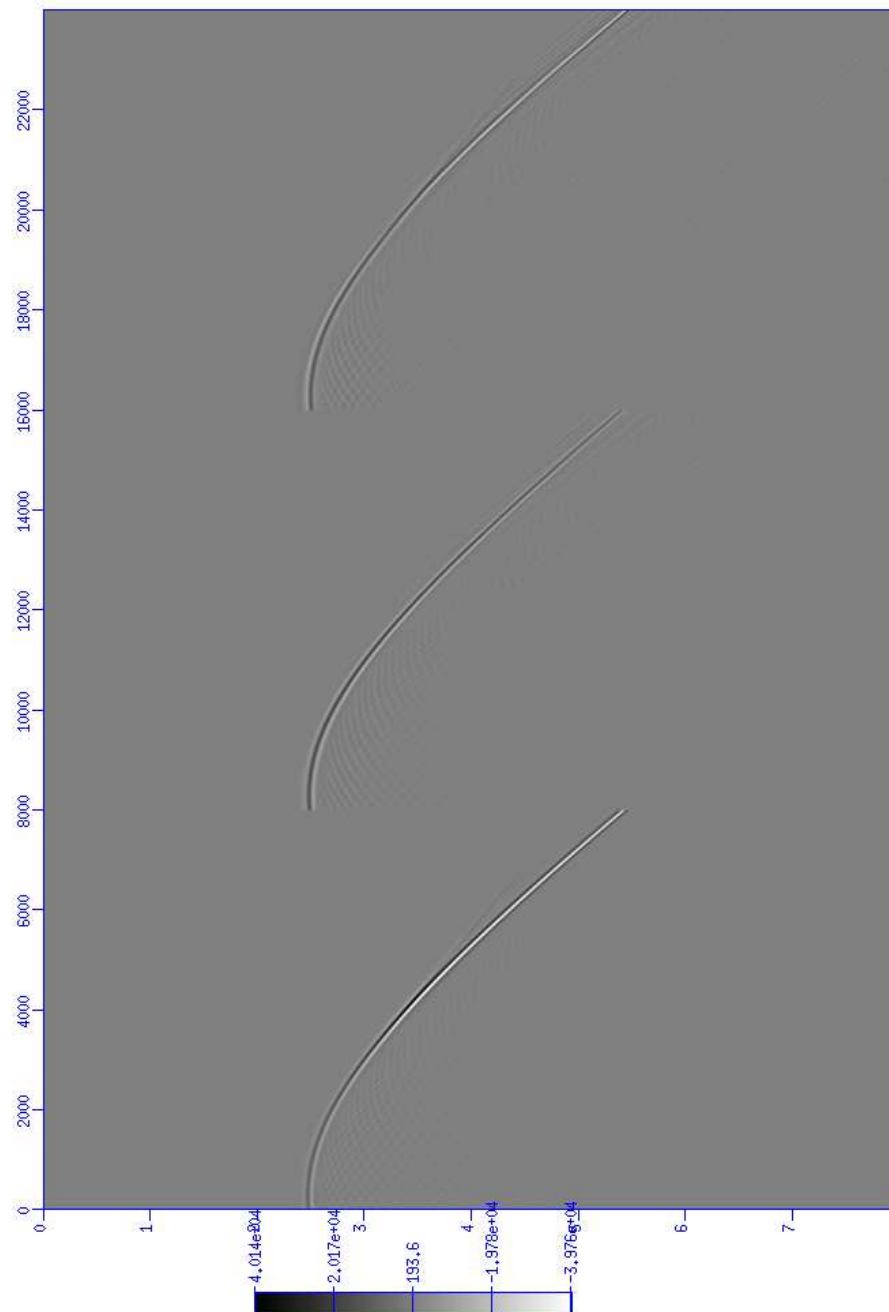


FIG. 6.8 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSP* et la réflexion *GSRln*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse avec l'interface pentée. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

résultats suivants :

	GSR	GSRln	Constant
Résidu	36.43%	5.78%	11.43%

On peut remarquer que les différences sur les résidus se retrouvent sur les sismogrammes, comme en témoignent les figures 6.9 à 6.11.

Le résultat de Twist++ (sur la gauche des figures 6.9-6.11) modélise donc toutes les arrivées. On peut noter sur ces figures, les deux arrivées primaires et les 3 multiples. En figure 6.9, on représente les résultats obtenus pour le GSR. On y observe encore les bruits déjà mentionnés pour le modèle bicouche à interface horizontale ainsi que les problèmes de temps d'arrivée pour les grands offsets. Ces problèmes sont bien visibles sur la différence des sismogrammes (partie droite de la figure 6.9). Pour le cas CR (Figure 6.10), les amplitudes ne sont pas correctes. De plus, ni la headwave ni la rotation de phase ne sont modélisées. Le fait de passer au GSRln (figure 6.11) permet d'éliminer les bruits du GSR et de corriger les temps d'arrivées. Les figures suivantes montrent un des avantages de la méthodes GSP qui est de pouvoir modéliser les arrivées primaires seules (figure 6.12), arrivées primaires et le premier multiple (Figure 6.13), arrivées primaires et les deux premiers multiples (Figure 6.14) et les arrivées primaires et les trois premiers multiples (Figure 6.11). Il est important de noter que toutes ces figures sont obtenues en faisant tourner le code une seule fois.

6.4.4 Modèle 5 couches

	GSR _e	GSR	GSRln	CR
Résidu	21.57%	75.65%	39.25%	57.86%

Ce modèle combine toutes les difficultés précédentes (interfaces planes et interfaces pentées). Les résultats des résidus confirment ceux des sismogrammes (figures 6.15, 6.16, 6.17 et 6.18). Le GSRln (Fig. 6.18) est cinématiquement correct, et n'est pas si éloigné du GSR_e (Fig. 6.15), contrairement à ce que le calcul des résidus fait dire. Par contre le GSR (Fig. 6.16) est erroné pour les grands offsets dans le cas des interfaces horizontales. L'opérateur CR (Fig. 6.17) ne rend pas compte correctement des variations d'amplitude, ce qui est logique de par sa construction.

6.4.5 Modèle GXT

Pour ce modèle, toutes les difficultés sont présentes : fortes variations latérales de vitesse, pentes ... Dans cette configuration, le propagateur paraxial donne de bien meilleur résultats sur les sismogrammes.

	GSP+GSR	PP+GSR	GSP+GSRln	PP+GSRln	GSP+CR	PP+CR
Résidu	96.74%	43.60%	97.23%	57.00%	96.08%	43.31%

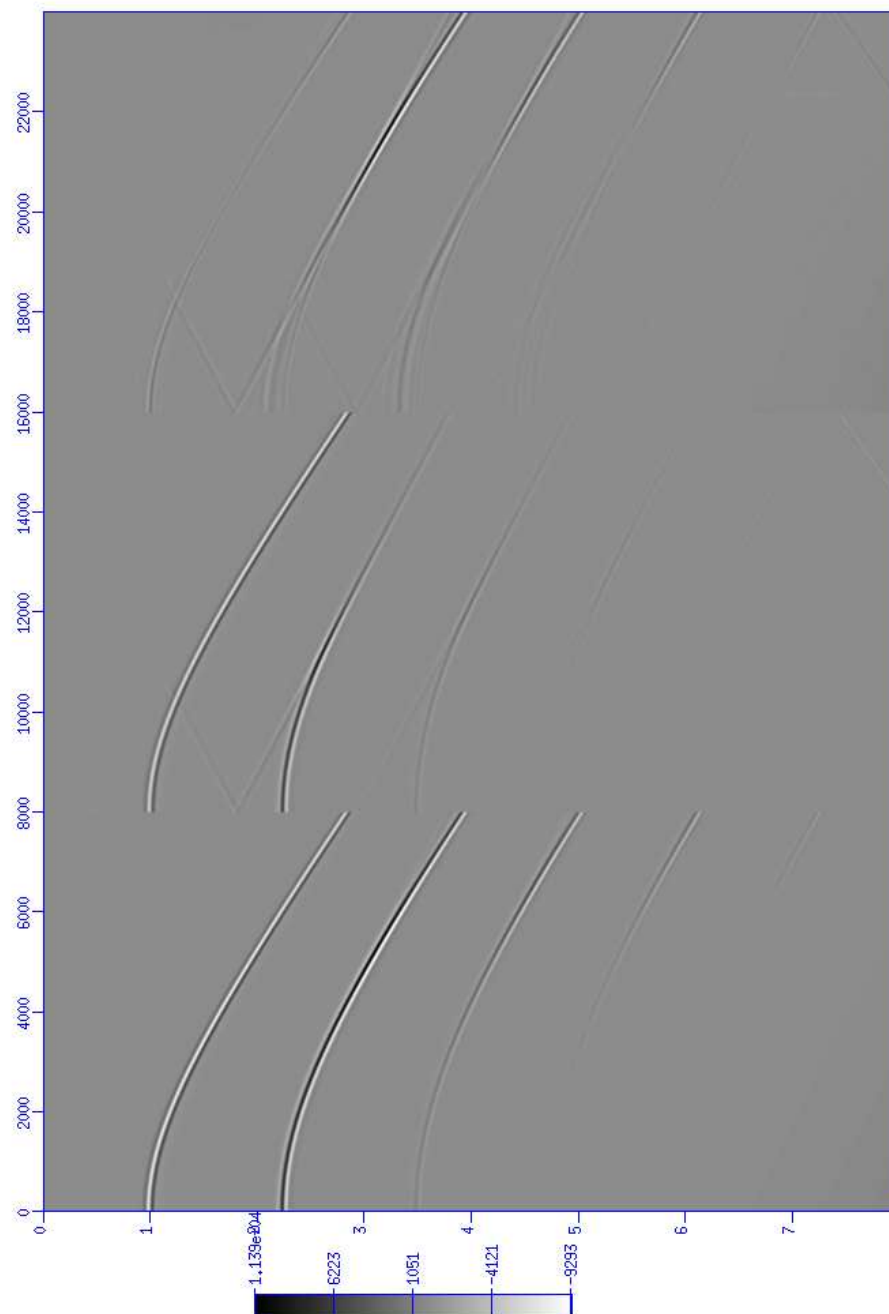


FIG. 6.9 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSP* et la réflexion *GSR*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse tri-couches. En abscisse : la surface (x) ; en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

On peut constater que les résultats sont proches, pour un propagateur donné, quel que soit l'opérateur de réflexion choisi. Les meilleurs résultats sont obtenus avec

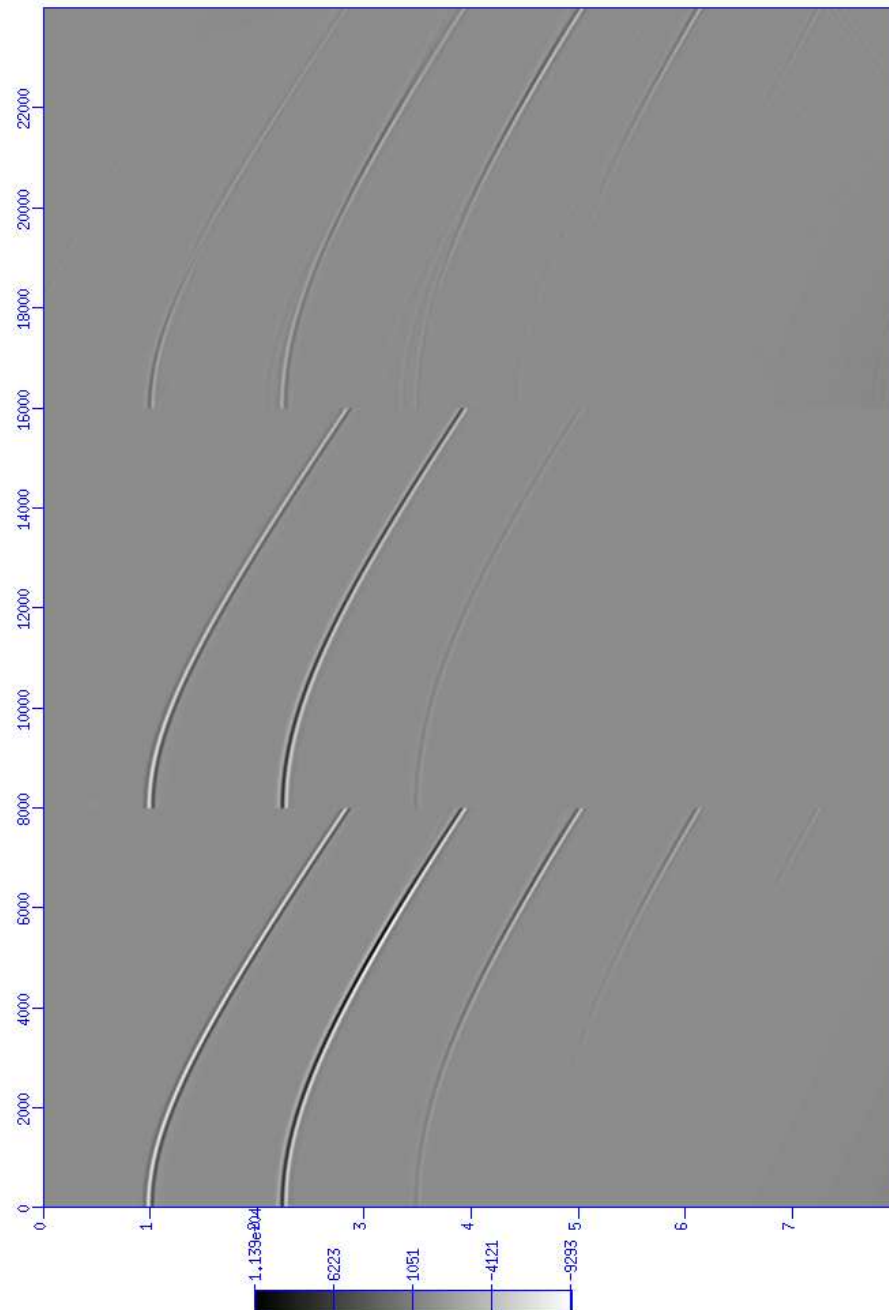


FIG. 6.10 – *A gauche, test de référence (Twist++). Au milieu, le propagateur GSP et la réflexion CR. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse tri-couches. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).*

le propagateur paraxial.

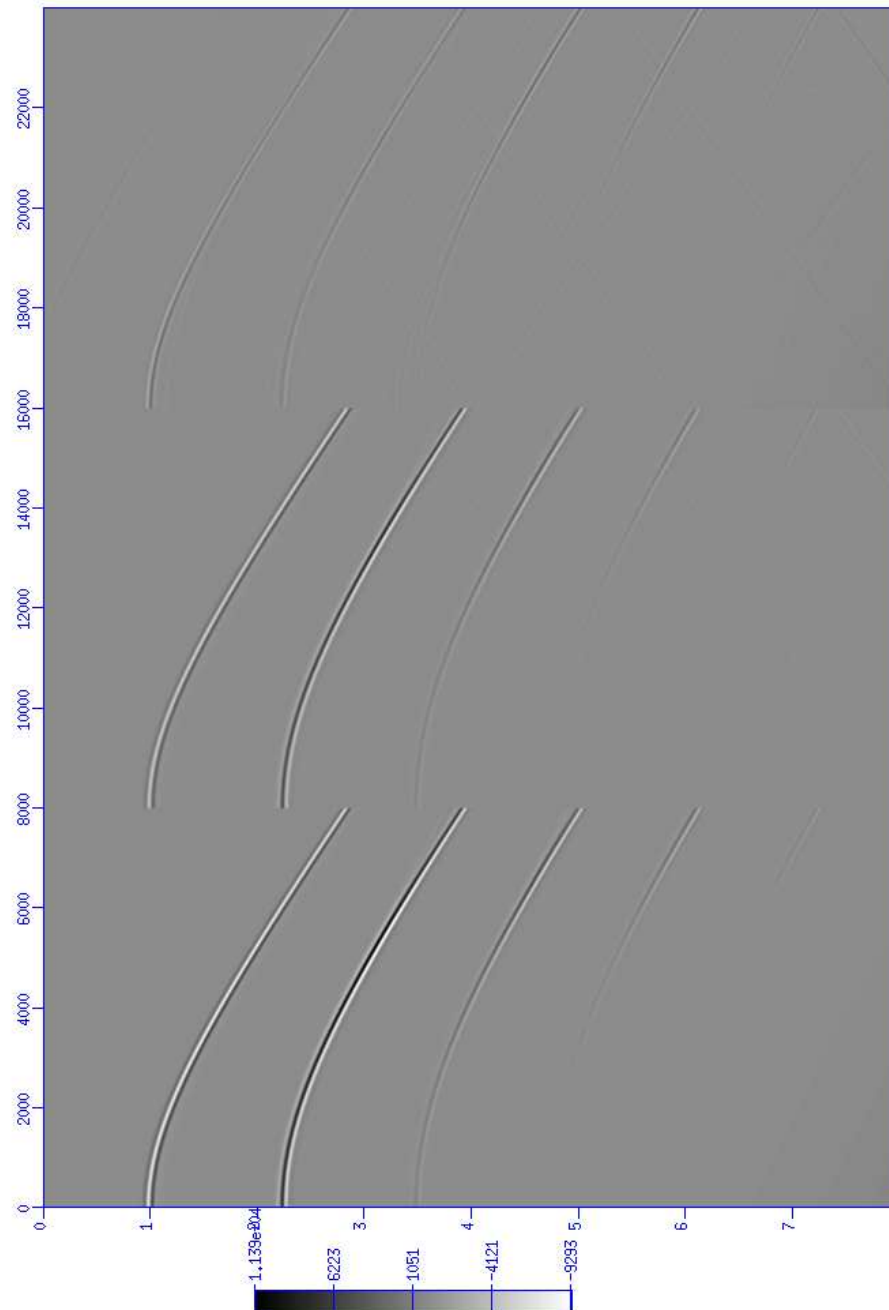


FIG. 6.11 – *A gauche, test de référence (Twist++). Au milieu, le propagateur GSP et la réflexion GSRLn. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse tri-couches avec GSRLn. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).*

Sur les figures 6.20 et 6.21, l'opérateur de réflexion est constant. On peut constater que les périodicités sont plus présentes sur la figure 6.21.

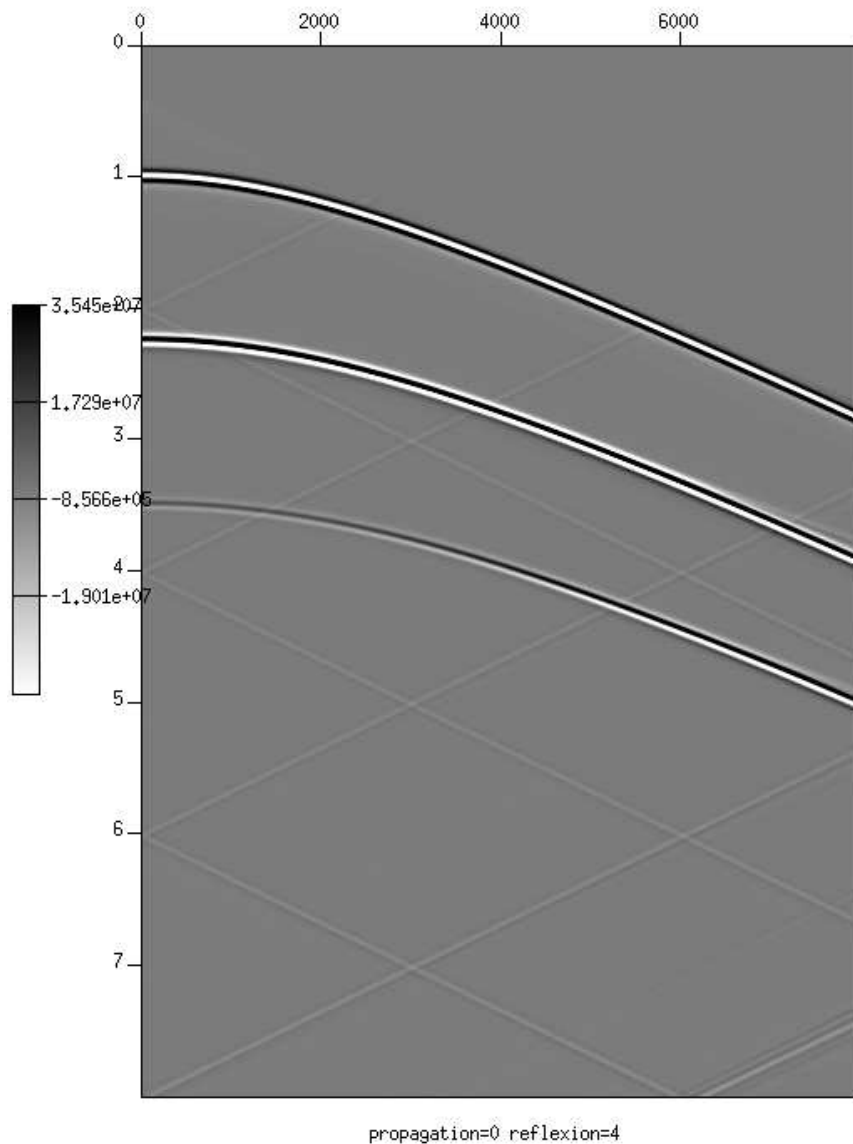


FIG. 6.12 – Test sur le modèle 3 couches avec $GSRI_n$, arrivée primaire. Un filtre y est appliqué qui réduit les valeurs maximales de telle sorte que l'on peu voir des événements moins importants. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

Sur la figure 6.22, l'opérateur de réflexion $GSRI_n$ n'est pas très convainquant alors qu'il l'était sur des cas simples.

6.4.6 Modèle 3D

Les figures 6.23, 6.24 et 6.25 représentent les sismogrammes (avec x en abscisse et le temps t en ordonnée) obtenus à la largeur $y = 0$ m, $y = 1400$ m et $y = 3000$ m

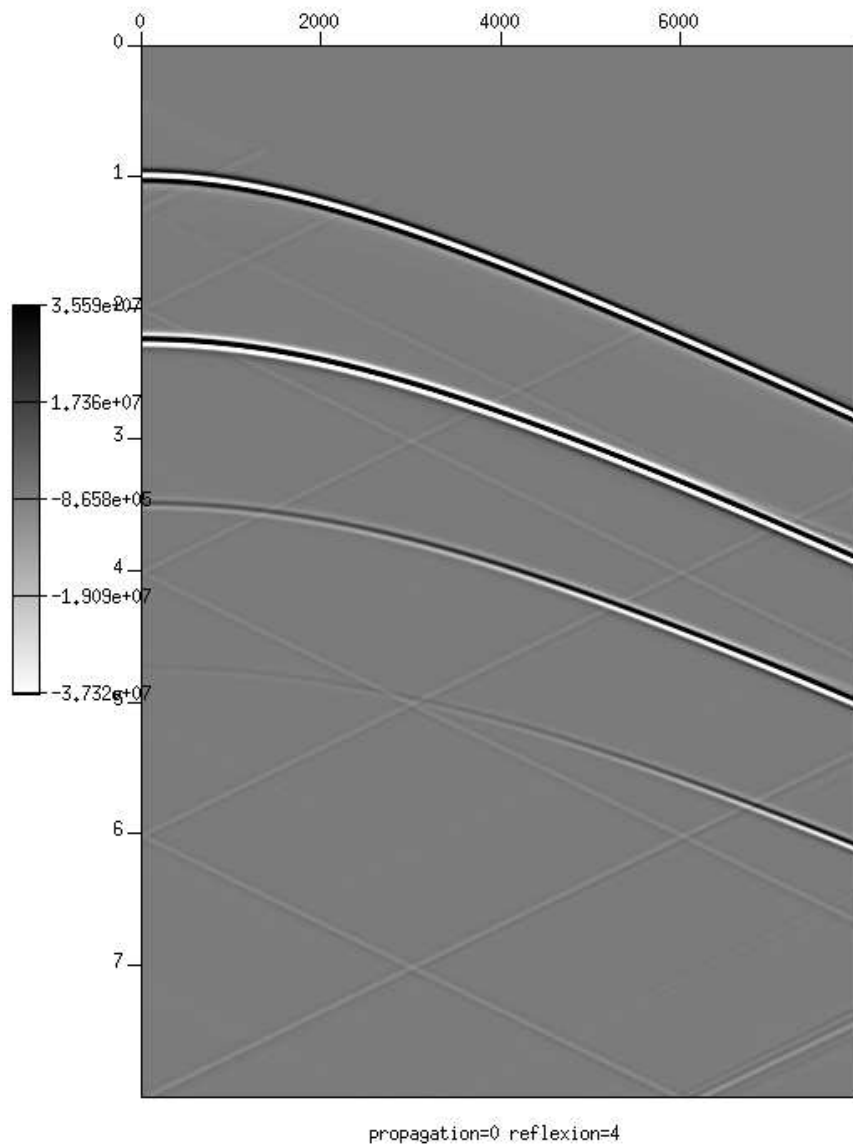


FIG. 6.13 – Test sur le modèle 3 couches avec *GSRLn*, arrivée primaire et le premier multiple. Un filtre y est appliqué qui réduit les valeurs maximales de telle sorte que l'on peu voir des événements moins importants. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

respectivement.

Les temps d'arrivées semblent corrects, plus on s'éloigne du point de tir dans la direction y , plus l'arrivée primaire arrive tard. Les figures représentent les sismogrammes, avec un gain d'appliqué pour voir les événements moins importants. On peut notamment voir que les périodicités sont importantes. Les transformées de Fourier se font maintenant suivant x et y , aux périodicités en temps et en x de la 2D s'ajoutent celles en y pour la 3D.

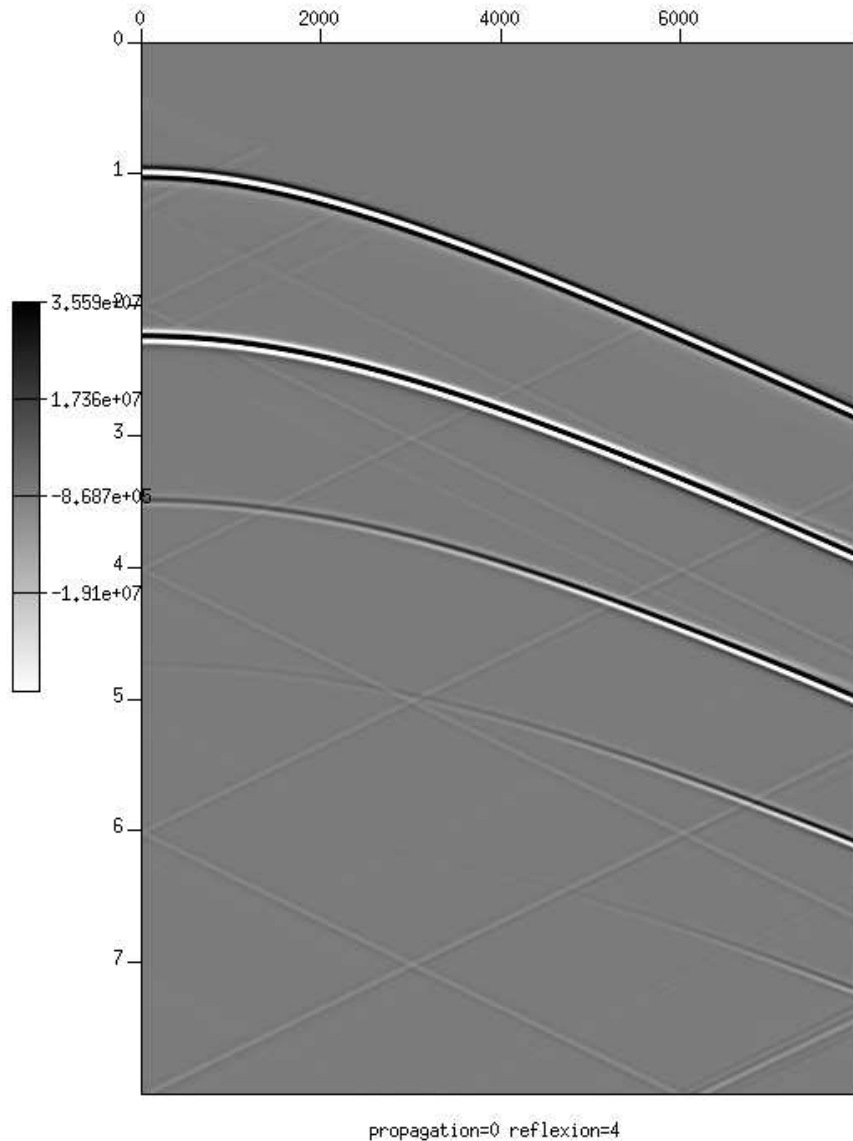


FIG. 6.14 – Test sur le modèle 3 couches avec $GSRln$, arrivée primaire et les deux premiers multiples. Un filtre y est appliqué qui réduit les valeurs maximales de telle sorte que l'on peu voir des événements moins importants. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

La comparaison avec une autre méthode en 3D n'a pas pu être effectuée, du fait de l'absence de codes opérationnels à Total.

6.5 Conclusion

Ces tests ont permis de confirmer le bon fonctionnement du GSP dans des cas simples. Dès que l'on passe à un modèle plus compliqué, le propagateur paraxial

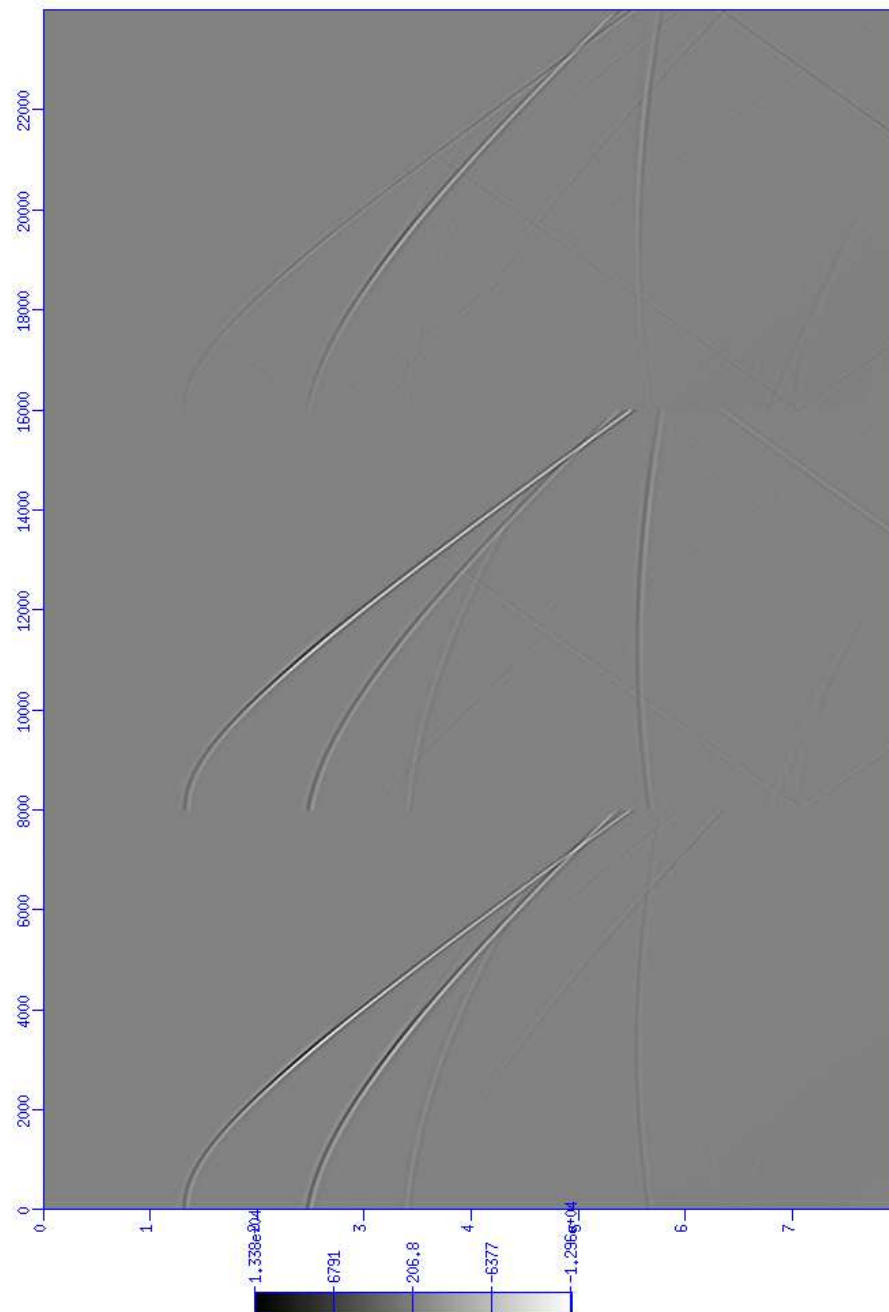


FIG. 6.15 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSPe* et la réflexion *GSRe*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse à 5 couches. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

donne de meilleurs résultats. Au vu de ces résultats, on a commencé à tester un opérateur de réflexion dans le même esprit que l'opérateur de propagation paraxial.

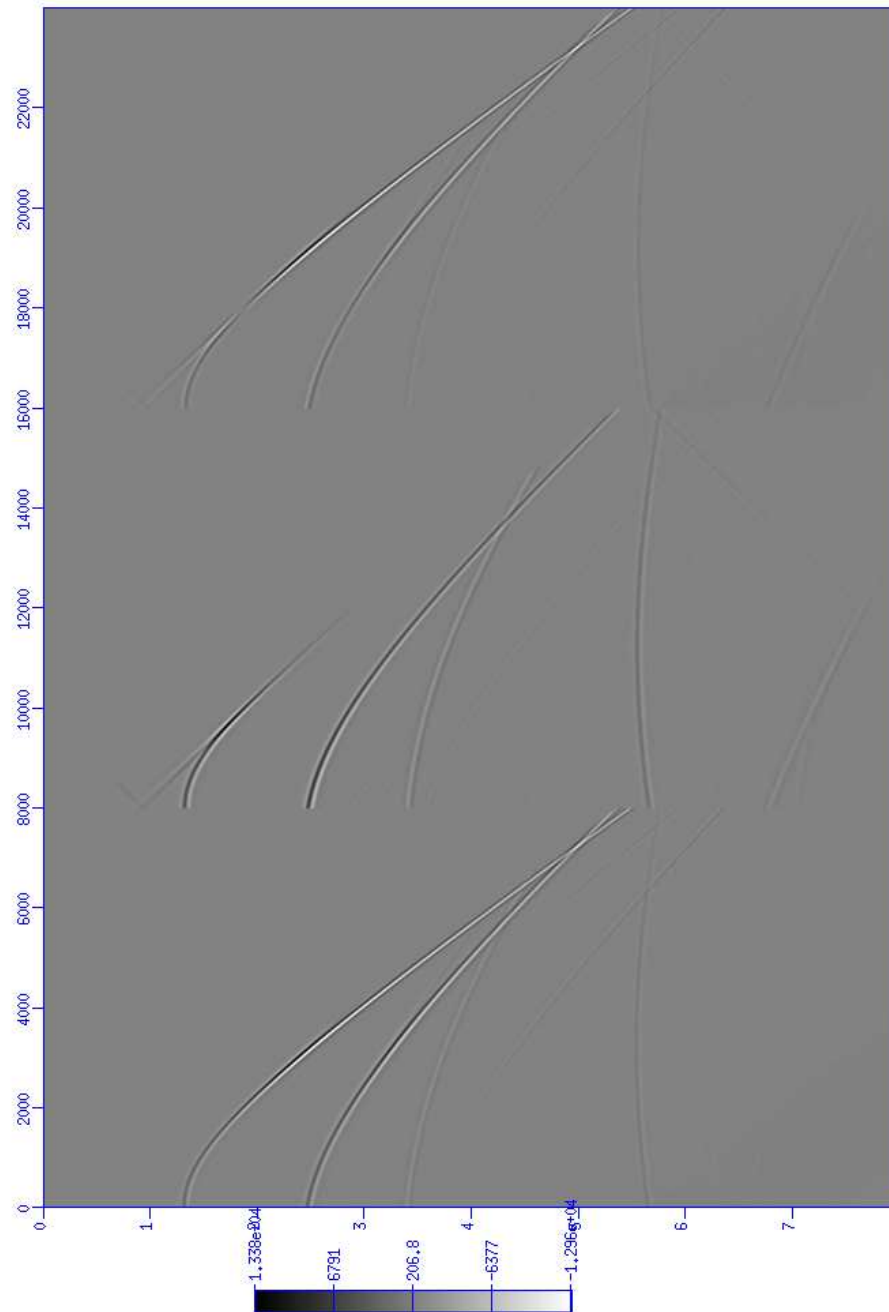


FIG. 6.16 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSPe* et la réflexion *GSR*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse à 5 couches. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

Cet opérateur de réflexion pose encore des problèmes de stabilité, lié notamment à l'inversion de l'opérateur d'Helmholtz.

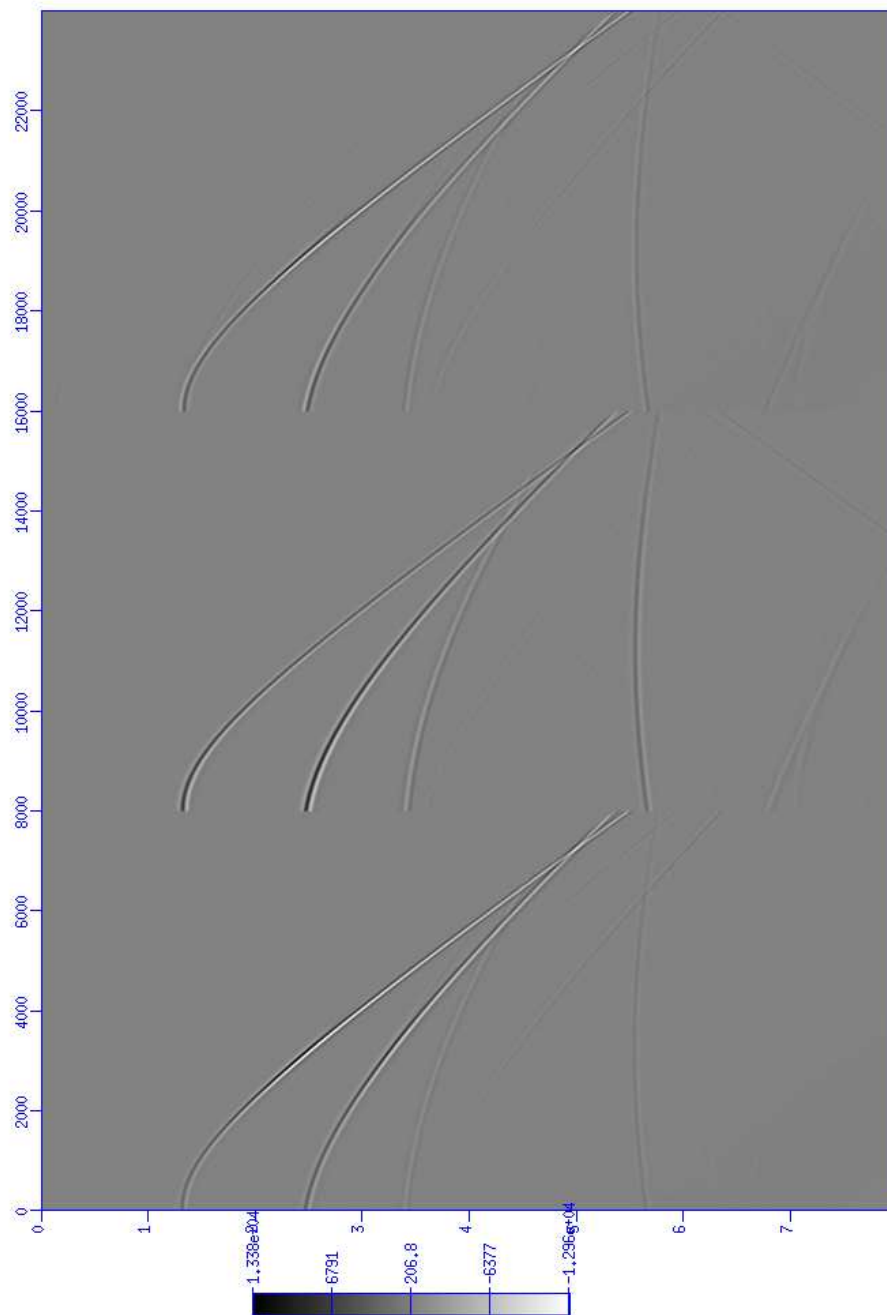


FIG. 6.17 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSPe* et la réflexion *CR*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse à 5 couches. En abscisse : la surface (x) ; en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

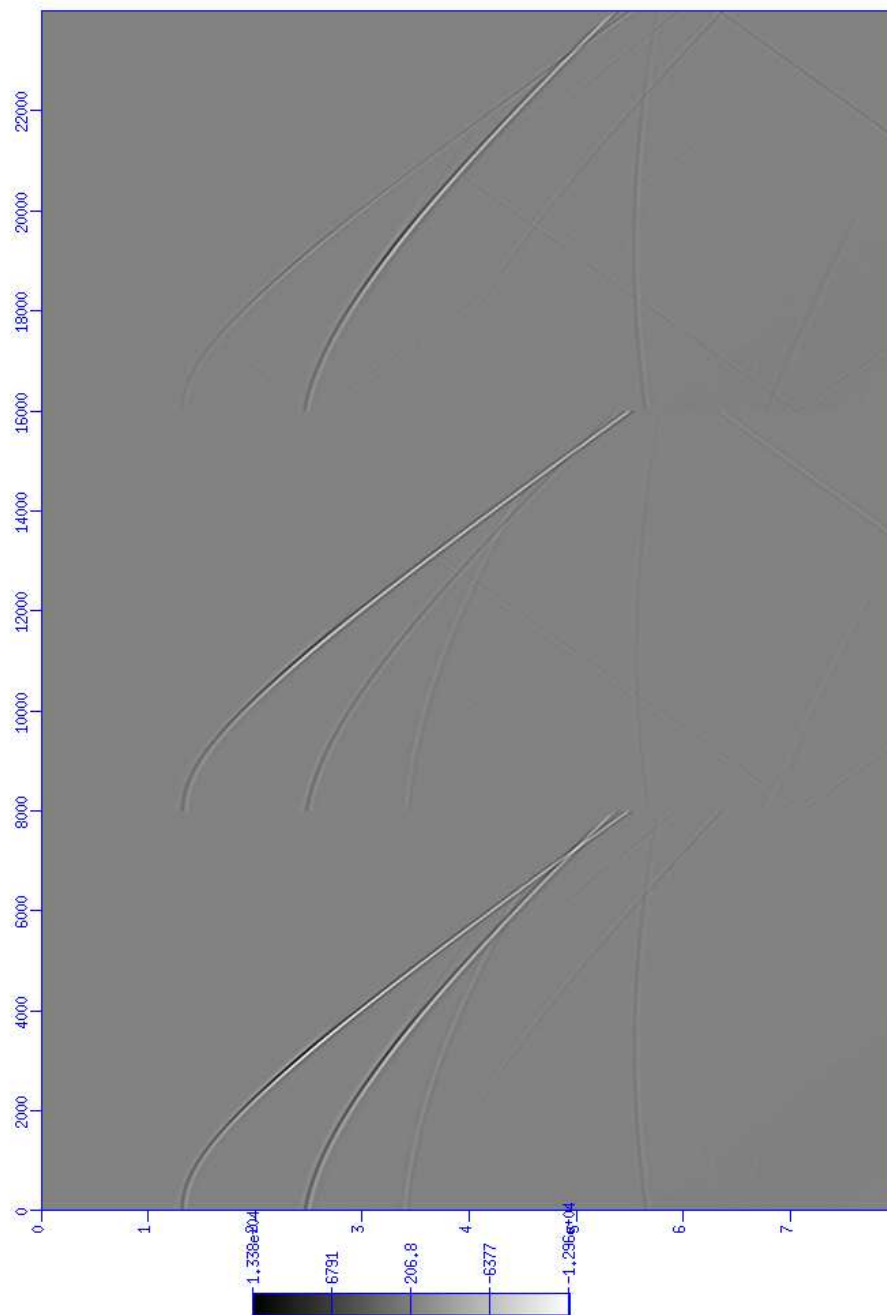


FIG. 6.18 – A gauche, test de référence (*Twist++*). Au milieu, le propagateur *GSPe* et la réflexion *GSRln*. A droite, la différence des deux. Modèle de vitesse à 5 couches. En abscisse : la surface (x) ; en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

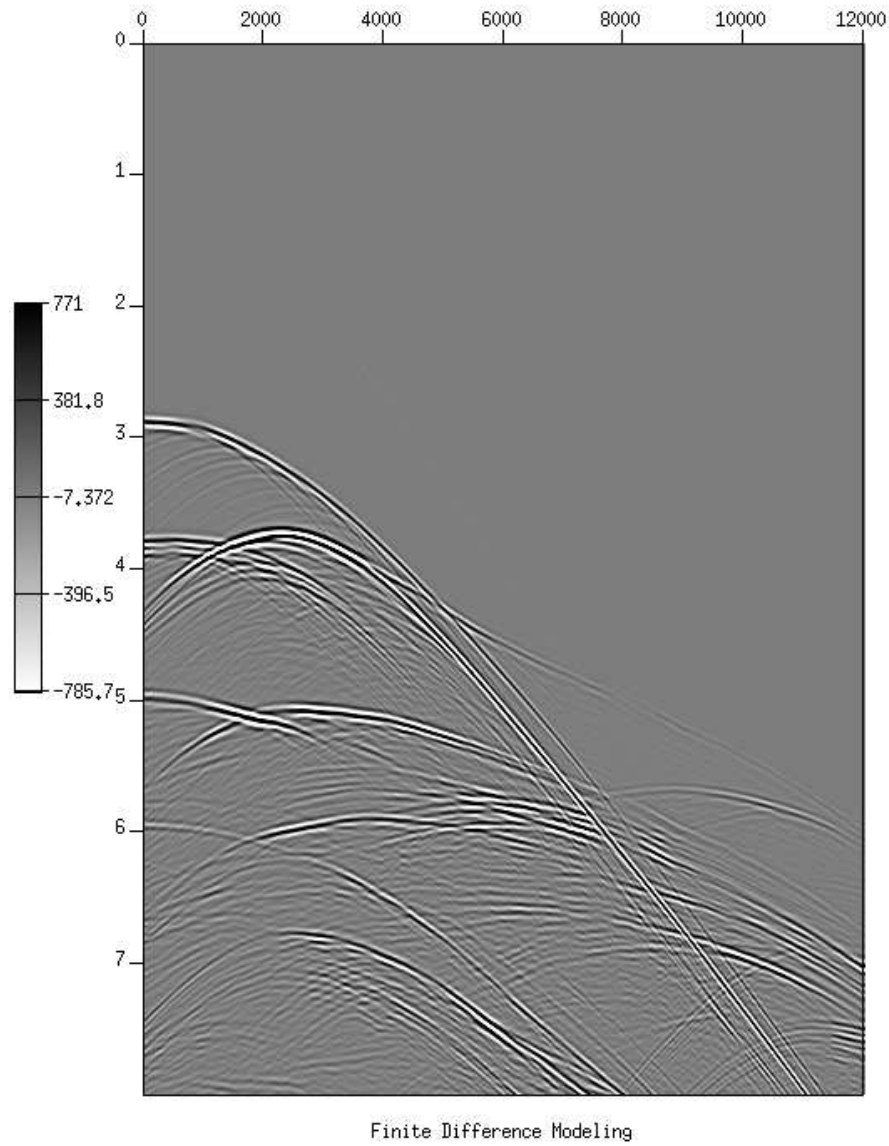


FIG. 6.19 – Test sur le modèle GXT avec Twist++. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

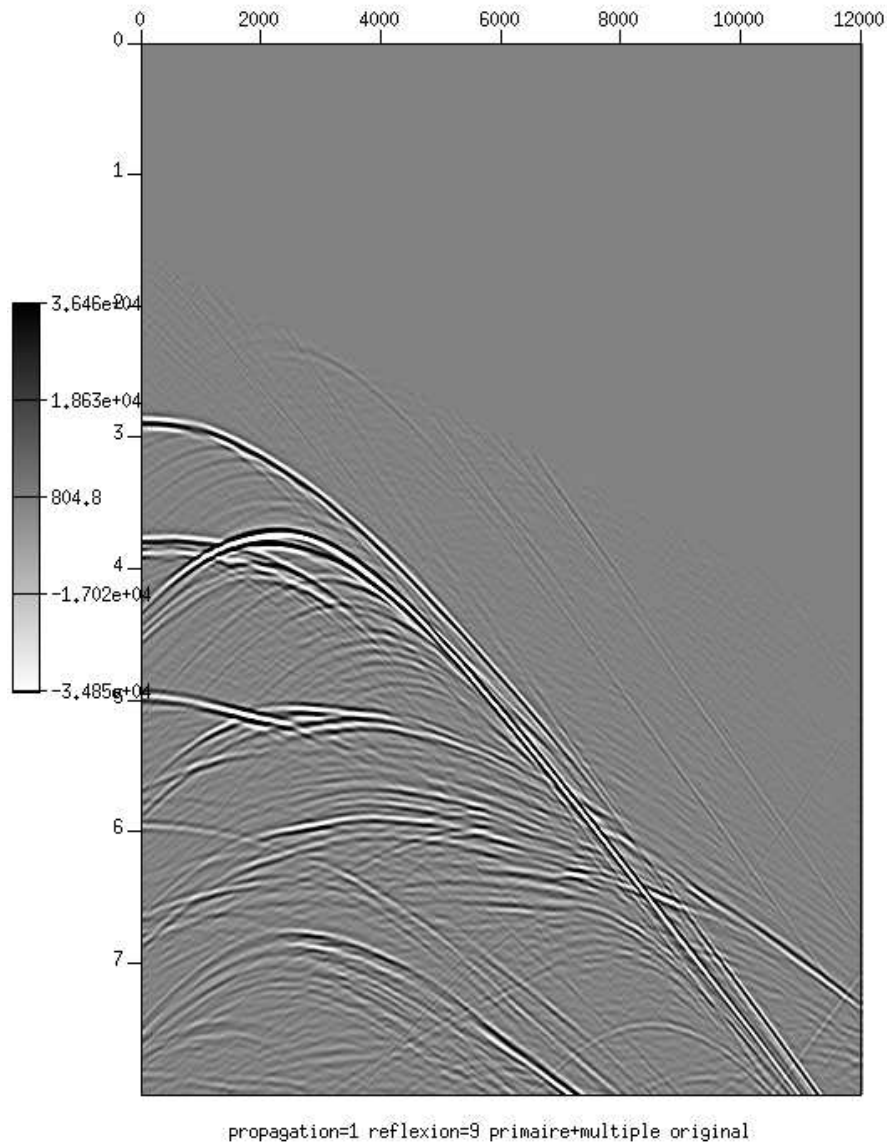


FIG. 6.20 – Test sur le modèle *GXT*, avec l'opérateur de propagation *GSP* et l'opérateur constant pour la réflexion. En abscisse : la surface (x) ; en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

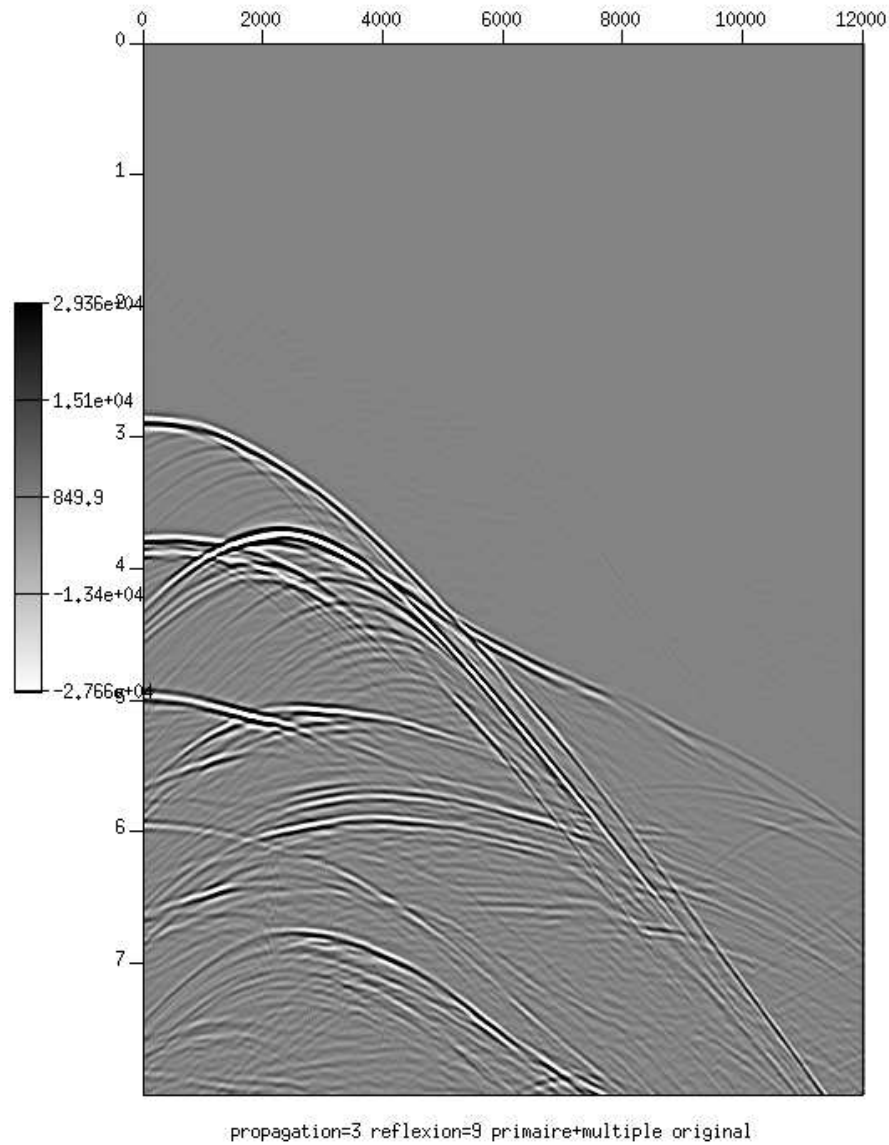


FIG. 6.21 – Test sur le modèle *GXT*, avec l'opérateur de propagation *Paraxial* et l'opérateur constant pour la réflexion. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

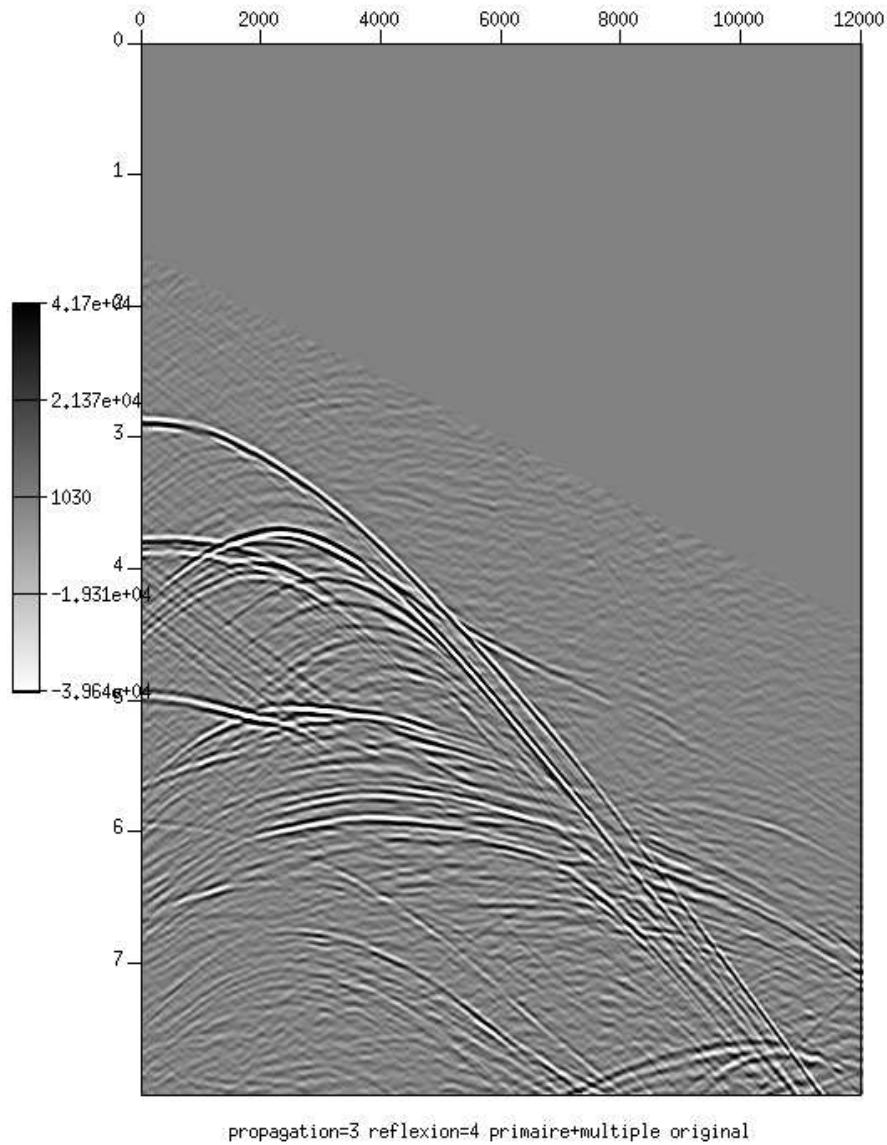


FIG. 6.22 – Test sur le modèle *GXT*, avec l'opérateur de propagation *Paraxial* et l'opérateur *GSRln* pour la réflexion. En abscisse : la surface (x) ; en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

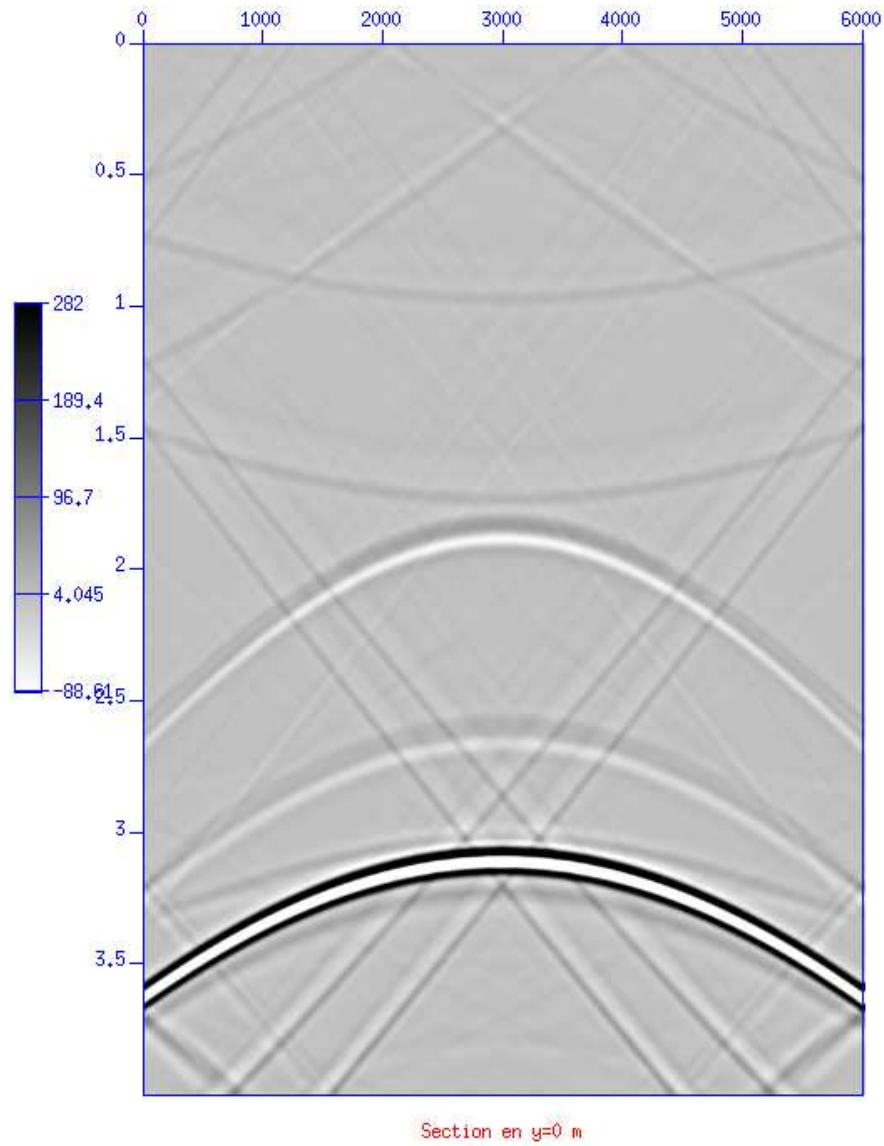


FIG. 6.23 – Test sur le modèle 3d bi-couches avec $GSRI_n$, $y = 0$ m. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

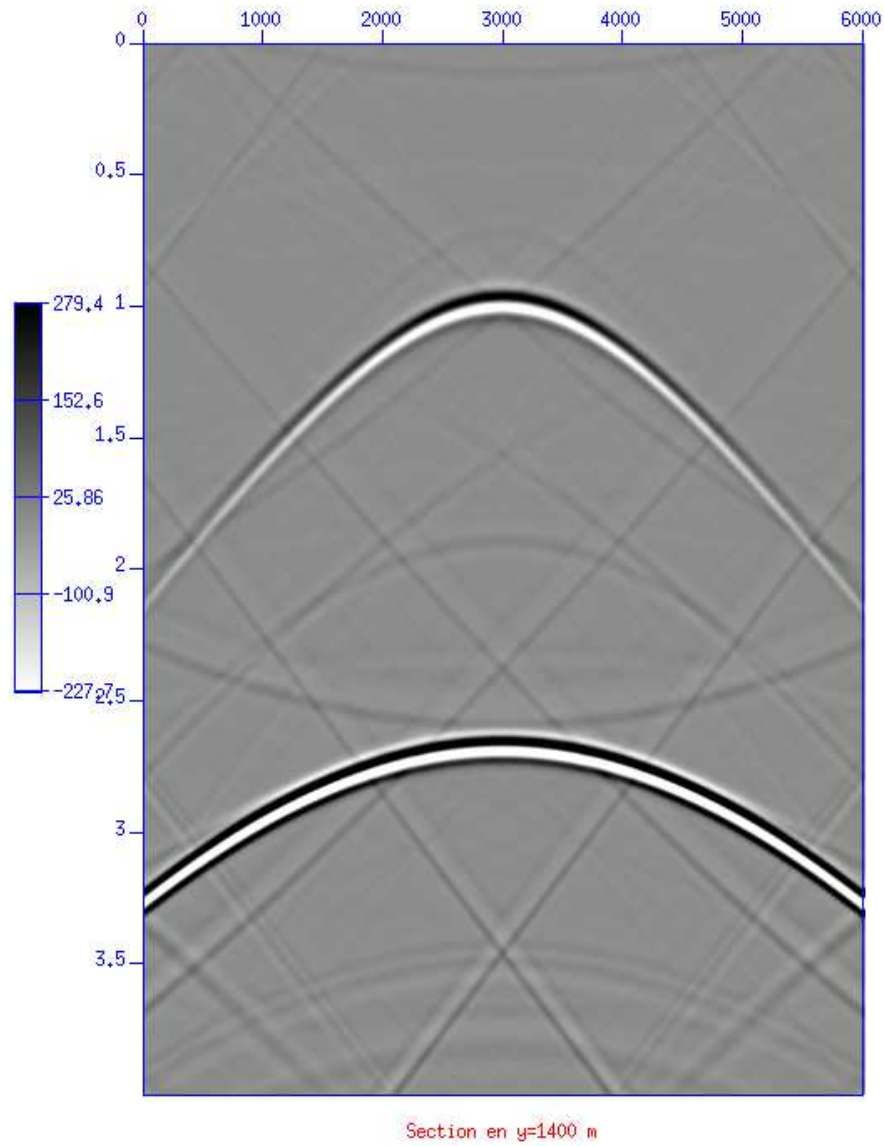


FIG. 6.24 – Test sur le modèle 3d bi-couches avec $GSRI_n$, $y = 1400$ m. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

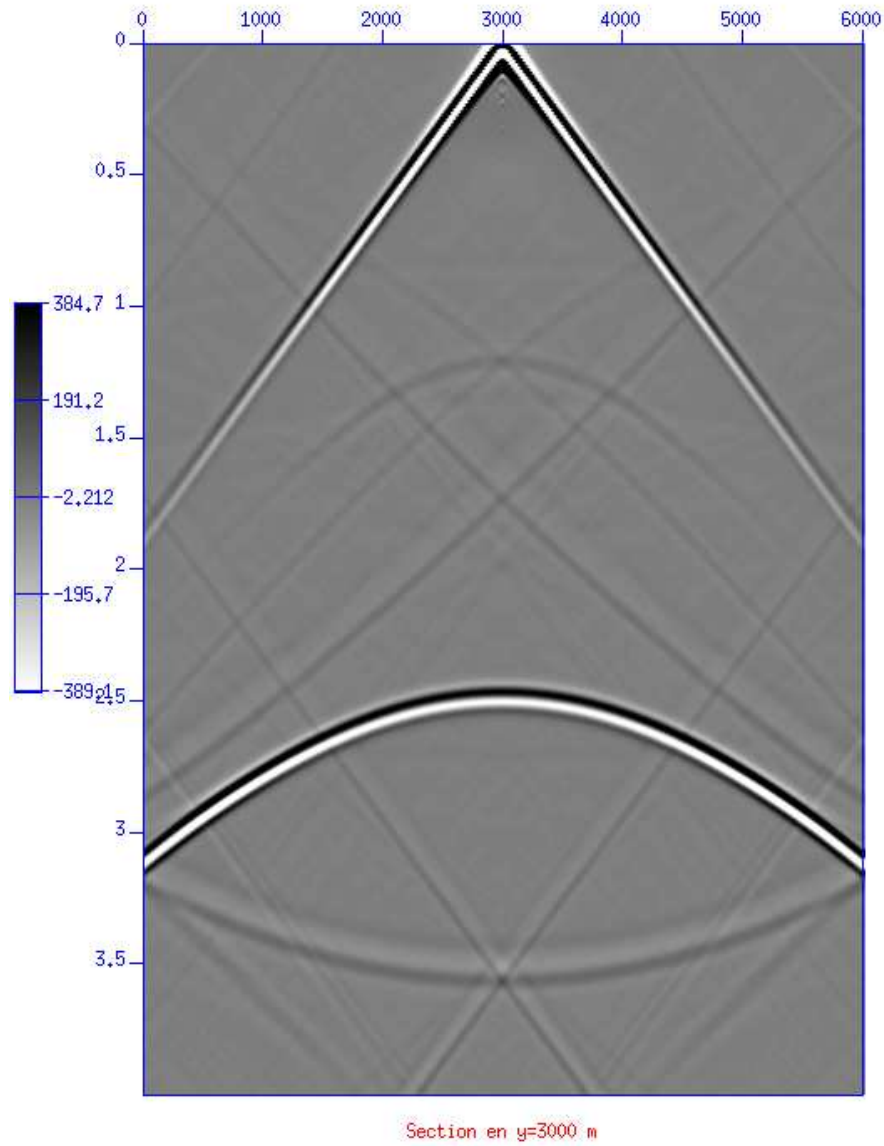


FIG. 6.25 – Test sur le modèle 3d bi-couches avec GSRLn, $y = 3000$ m. En abscisse : la surface (x); en ordonnée (orientée vers le bas) : les temps d'arrivée (t).

Chapitre 7

Le modèle GSP avec PML

On a pu constater que les transformées de Fourier utilisées pour les calculs numériques créent des périodicités artificielles qui se traduisent par des événements parasites sur les sismogrammes. Bien évidemment, on peut améliorer les résultats en augmentant la taille du domaine de calcul. On dispose ainsi d'une fenêtre à l'intérieur de laquelle les périodicités artificielles n'ont pas eu le temps d'interagir et les résultats observés sont ainsi satisfaisants. Hélas, il s'avère que l'on doit augmenter la taille du domaine de calcul de façon très importante si on veut obtenir des résultats corrects. Cette stratégie se solde immédiatement par des coûts de calcul non négligeables ce qui handicape sérieusement la méthode numérique, comparée à une méthode de différences finies.

Une autre approche consisterait à utiliser des couches absorbantes, dont la finalité serait de casser les périodicités artificielles créées par les transformées de Fourier. Dans cet ordre d'idée, nous proposons de coupler la méthode GSP avec une méthode de type PML (Perfected Matched Layer). A l'origine, les PML ont été développées pour simuler un domaine de propagation infini dans une direction tout en limitant les calculs à un domaine borné. Les premiers travaux sur ce sujet ont été effectués par J.P. Bérenger [16] pour le système de Maxwell. Ils ont ensuite été suivis par de nombreux travaux concernant notamment l'équation des ondes [11, 10, 57]. Le plus souvent, le modèle PML est dérivé en utilisant un changement de variable dans la direction normale à la couche absorbante avec *splitting* des inconnues (voir par exemple [25]).

Dans ce chapitre, on propose de transformer le modèle GSP *via* un changement de variables et nous qualifions le modèle résultant de modèle GSP-PML.

7.1 Un modèle couplé GSP-PML

Le but étant d'atténuer les périodicités artificielles causées par des transformées de Fourier en \mathbf{x}' , on va coupler le modèle GSP à des PML dans la direction \mathbf{x}' . Considérons le changement de variables :

$$\mathbf{x}' = (x, y) \mapsto \mathbf{X}' = (X_x, X_y) \quad (7.1)$$

avec :

$$\begin{cases} X_x = x + \frac{i}{\omega} \int_0^x \sigma_x(\xi) d\xi \\ X_y = y + \frac{i}{\omega} \int_0^y \sigma_y(\xi) d\xi \end{cases},$$

où $\sigma(\cdot)$ est un coefficient d'atténuation positif (aussi appelé damping). On a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} = 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(x) \\ \frac{\partial X_y}{\partial y} = 1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(y) \end{cases}$$

ce qui entraîne, si $\Phi(\mathbf{X}') = \varphi(\mathbf{x}')$,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}'} \varphi(\mathbf{x}') &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_x} \frac{\partial X_x}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial X_y} \frac{\partial X_y}{\partial y} \right) \\ &= \left(\left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(x) \right) \frac{\partial \Phi}{\partial X_x}, \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(y) \right) \frac{\partial \Phi}{\partial X_y} \right) \end{aligned}$$

Injecter (7.1) dans les équations du GSP revient donc à remplacer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par $(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(x))^{-1} \frac{\partial}{\partial x}$ et $(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(y))^{-1} \frac{\partial}{\partial y}$ respectivement.

L'opérateur $div_T \left(\frac{1}{\rho} \nabla_T \right)$ s'écrit alors dans ce changement de variables :

$$\begin{aligned} \widetilde{div}_T \left(\frac{1}{\rho} \widetilde{\nabla}_T \right) &= \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(x) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(x) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &+ \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(y) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(y) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

et le modèle couplé GSP-PML va s'appuyer sur le système matriciel :

$$(\mathbf{D}_z + \widetilde{L})\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (7.3)$$

avec $\widetilde{L} = i\omega \widetilde{L}^\sharp$ et

$$\widetilde{L}^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \kappa + \frac{1}{\omega^2} \widetilde{div}_T \left(\frac{1}{\rho} \widetilde{\nabla}_T \right) & 0 \end{pmatrix},$$

l'opérateur $\widetilde{div}_T \left(\frac{1}{\rho} \widetilde{\nabla}_T \right)$ étant défini par (7.2).

On peut noter que même si ρ est constant par rapport à \mathbf{x}' , l'opérateur \widetilde{L}^\sharp se décompose en la somme de deux opérateurs : $\widetilde{L}_0^\sharp + \widetilde{L}_{-1}^\sharp$. On se retrouve donc dans la même configuration que si ρ était variable (cf. chapitre 2).

L'opérateur \widetilde{L}_0^\sharp est donné par :

$$\widetilde{L}_0^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \kappa + \frac{1}{\rho\omega^2} \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_x(x) \right)^{-2} \partial_x^2 + \frac{1}{\rho\omega^2} \left(1 + \frac{i}{\omega} \sigma_y(y) \right)^{-2} \partial_y^2 & 0 \end{pmatrix}$$

et son symbole est la matrice :

$$\tilde{\mathcal{L}}_0^\sharp = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \kappa - \frac{1}{\rho\omega^2} \left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma_x(x)\right)^{-2} k_x^2 - \frac{1}{\rho\omega^2} \left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma_y(y)\right)^{-2} k_y^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{L}}_0^\sharp$ sont donc solutions de l'équation :

$$\tilde{\gamma}_0^2 - \left(\kappa\rho - \frac{1}{\omega^2} \left[\left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma_x(x)\right)^{-2} k_x^2 + \left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma_y(y)\right)^{-2} k_y^2 \right] \right) = 0.$$

On obtient ainsi pour valeurs propres :

$$\tilde{\gamma}_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2} \left[\left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma_x(x)\right)^{-2} k_x^2 + \left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma_y(y)\right)^{-2} k_y^2 \right]}.$$

Un modèle GSP couplé à des PML peut alors s'écrire de la façon suivante. Soit \tilde{P}_0 l'opérateur dont le symbole est donné par la matrice \tilde{P}_0 formée des vecteurs propres de $\tilde{\mathcal{L}}_0^\sharp$. On pose $\tilde{V}_0 = \tilde{P}_0^{-1}\mathbf{U}$ où \mathbf{U} est solution de (7.2). La nouvelle inconnue \tilde{V}_0 est alors solution de :

$$(\mathbf{D}_z + i\omega\tilde{\Lambda}_0)\tilde{V}_0 = \tilde{R}_0\tilde{V}_0 + \tilde{P}_0^{-1}\mathbf{F}$$

où $\tilde{\Lambda}_0$ est l'opérateur diagonal dont le symbole est $\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\gamma}_0 \end{pmatrix}$.

On retrouve en fait le même modèle que (2.12) dans lequel on remplace γ_0 par $\tilde{\gamma}_0$ dans l'écriture des symboles.

7.2 Tests numériques

Ce chapitre n'a été rédigé que dans le but de montrer que la piste des PML est intéressante pour nettoyer les sismogrammes. Aussi, pour des raisons de temps également, nous nous sommes contentés de tester numériquement un modèle GSP-PML où les coefficients de damping sont constants. Dans ce cas, on a, si

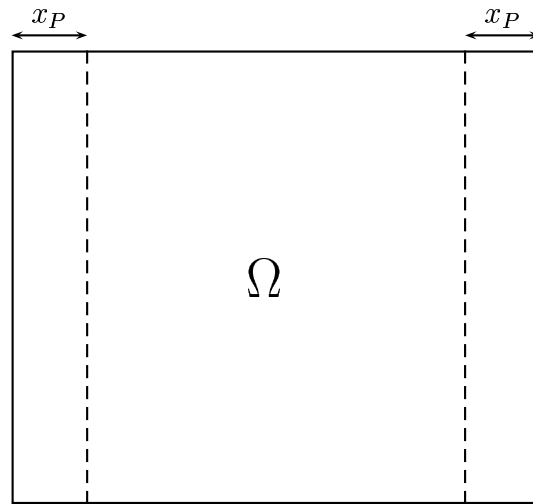
$$\sigma_x(\cdot) = \sigma_y(\cdot) = \sigma,$$

$$\tilde{\gamma}_0 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \frac{i}{\omega}\sigma\right)^{-2} |\mathbf{k}'|^2}$$

soit

$$\tilde{\gamma}_0 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{(\omega + i\sigma)^2}}. \quad (7.4)$$

On voit donc que l'introduction de cette PML (la plus simple à considérer) revient à introduire une partie imaginaire au niveau de la fréquence ω dans $\tilde{\gamma}_0$. On retrouve

FIG. 7.1 – *Domaine de calcul avec PML*

une idée déjà évoquée dans [68] mais non similaire toutefois car il ne s'agit pas de remplacer systématiquement ω par $\omega + i\sigma$. Seule l'expression de $\tilde{\gamma}_0$ est modifiée. L'expression $\tilde{\gamma}_0$ présente un avantage très intéressant car l'introduction du paramètre $i\sigma$ élimine la zone singulière $\frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2}$. On peut donc s'affranchir d'utiliser une coupure du plan. Il n'y a plus de singularité à contourner, la méthode devrait être plus stable. Les deux tests présentés en figure 7.2 et 7.3 sont issus de tests menés sur le modèle de vitesse bi-couche avec une interface pentée. Les figures représentent des sismogrammes sur lesquels les valeurs maximales sont abaissées, pour permettre de voir des événements moins importants mais tout de même présents. Sur la figure 7.2, la méthode GSP est utilisée sans PML. On peut noter l'importance des amplitudes des périodicités. Par contre sur la figure 7.3, où le couplage avec les PML est effectué, les périodicités sont très fortement atténuées. Reste que les amplitudes des événements principaux sont elles aussi atténuées, du fait d'avoir pris σ constant pour tout \mathbf{x}' .

Ces tests montrent que la piste des PML est intéressante, à condition de pouvoir utiliser un coefficient de damping non constant, ce qui nous renvoie au problème de séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' dans les symboles des opérateurs pseudo-différentiels utilisés. Pour l'instant, l'élimination des périodicités artificielles est synonyme d'une augmentation très considérable des coûts numériques. De nombreux développements sont encore nécessaires. D'un point de vue théorique, il reste à vérifier si le modèle GSP-PML est effectivement un modèle PML. D'un point de vue numérique, le schéma numérique doit être amélioré. Conscients de la difficulté liée à la dépendance des variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' *via* le coefficient de damping, il semblerait judicieux d'aban-

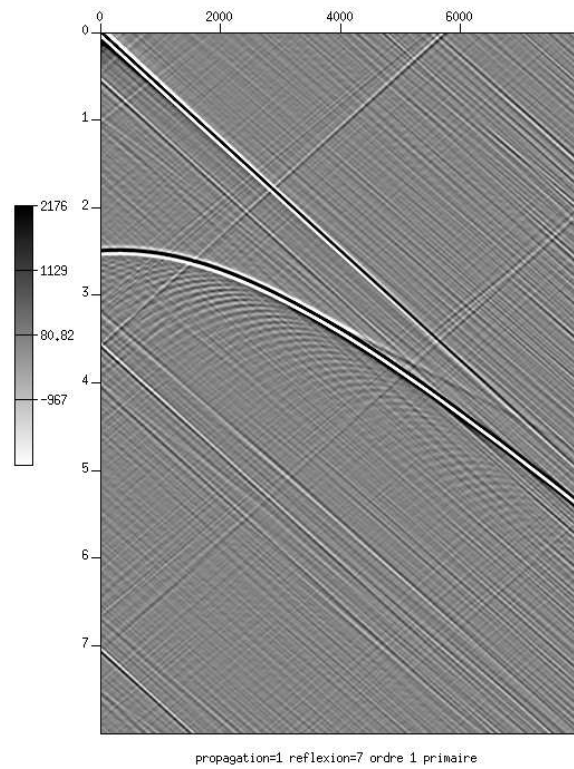


FIG. 7.2 – Test sur le modèle à interface pentée, sans PML. En abscisse est représenté la surface (x) et en ordonnée, orientée vers le bas, les temps d'arrivée (t).

donner la transformée de Fourier et de penser à une discrétisation par éléments finis des opérateurs.

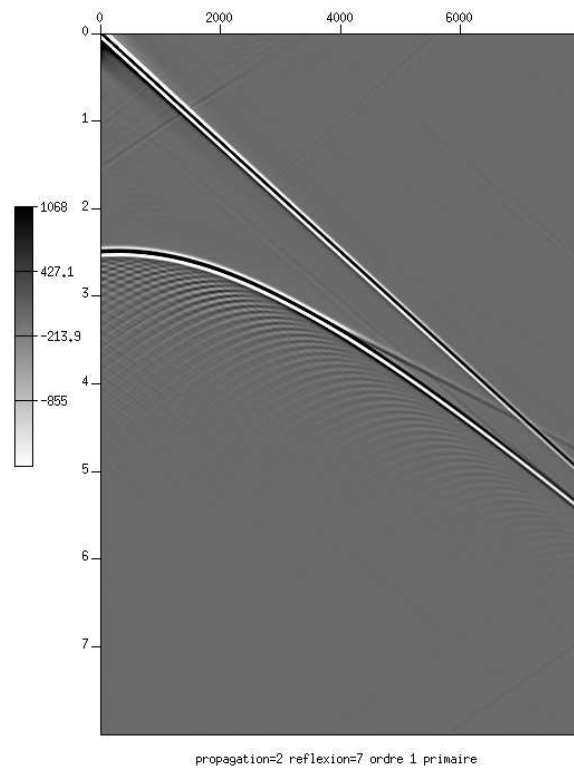


FIG. 7.3 – Test sur le modèle à interface pentée, avec PML. En abscisse est représenté la surface (x) et en ordonnée, orientée vers le bas, les temps d'arrivée (t).

Conclusion

L'analyse micro-locale de l'équation des ondes permet la mise en place d'une méthode de résolution qui étend les travaux anciens de H. Bremmer au cas de milieux fortement hétérogènes. D'un point de vue théorique, le modèle correspondant est exact, comparativement à d'autres méthodes comme les méthodes asymptotiques où, dès le départ, on ne cherche pas à résoudre le problème complet. Le passage aux applications numériques est beaucoup plus délicat. Le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels s'appuie sur une représentation intégrale de type Fourier faisant intervenir une fonction symbole. Dans le souci de limiter les charges de calcul, on procède à des approximations de la fonction symbole qui, le plus souvent, sont du type Taylor. On peut ainsi séparer les variables en dualité par Fourier et les opérateurs se représentent alors par une seule transformée de Fourier. On diminue ainsi considérablement les charges de calcul et de stockage. Les approximations se font autour d'un milieu de référence stratifié (la vitesse ne varie pas latéralement) si bien que la méthode est exacte en milieu tabulaire. Hélas, dès qu'on s'éloigne de cette configuration, les résultats se détériorent. Par exemple, dans le cas de forts pendages, la propagation n'est plus exacte et engendre des retards sur les temps d'arrivée pour les grands offsets. On peut améliorer les résultats en augmentant l'ordre des approximations de Taylor (aussi bien dans la propagation que dans la réflexion). Mais il s'agit de développements asymptotiques qui peuvent éventuellement diverger et qui, de plus, à un ordre donné, ne sont pas complets puisque nous n'avons pris en compte que le symbole principal des opérateurs.

Dans le cas de modèles compliqués comme le modèle GXT, les variations de vitesse ne permettent pas de justifier les approximations autour du milieu de référence à toutes les profondeurs. En effet, à une profondeur donnée, les écarts entre vitesse de référence et vitesse réelle peuvent être très importants alors que ces écarts jouent le rôle de petit paramètre dans l'approximation. Ceci se traduit par de fortes instabilités numériques et on obtient des résultats décevants.

Coupler la méthode GSP avec un propagateur paraxial semble être une bonne alternative qui ne nécessite pas de grandes modifications dans le code. En effet, la modularité du code permet d'utiliser aisément d'autres opérateurs de propagation, réflexion ou décomposition tout en préservant l'architecture du code. Il serait donc intéressant d'approfondir les recherches dans cette direction et envisager par exemple un couplage avec des méthodes asymptotiques.

Le couplage du GSP avec des PML reste à développer. Nous n'avons considéré qu'un cas très simple de PML où on agit sur toute la largeur du domaine de calcul. En fait, il faudrait considérer une fonction de damping à support dans un proche voisinage du domaine de calcul et nulle dans le-dit domaine. Tel que le couplage a été envisagé, des difficultés apparaissent car on ne peut plus séparer les variables primales et duales. On pourrait envisager de résoudre le problème sans approximation dans les couches absorbantes mais la méthode numérique s'en trouverait pénalisée lourdement au niveau des coûts de calcul. Cette question est actuellement à l'étude.

Annexe A

Calcul de $\sigma(A_{-1})$

On donne dans cette annexe les résultats des produits des matrices impliqués dans le calcul du $\sigma(A_{-1})$. Ce symbole est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(A_{-1}) = & \frac{i}{2\omega\gamma_0}(\text{off} - \text{diag}) \left(\mathcal{P}_0^{-1}(\partial_z \mathcal{P}_0) + i\omega \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\# \mathcal{P}_0 \right. \\ & - \omega \mathcal{P}_0^{-1} (\nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0 \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0^{-1}) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \\ & \left. + \omega \left(\mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 + \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) \right) \right), \end{aligned}$$

On rappelle les matrices intervenant dans le calcul :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^\# &= \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \frac{1}{c^2 \rho} - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{\omega^2 \rho} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \frac{\gamma_0^2}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_{-1}^\# &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-i}{\omega^2 \rho^2} \nabla_{\perp} \rho \cdot \mathbf{k}' & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice \mathcal{P}_0 est donnée par :

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{0,LR} = \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ \gamma_0 & -\gamma_0 \end{pmatrix}$$

On obtient les résultats intermédiaires suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^{-1}(\partial_z \mathcal{P}_0) &= \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \partial_z \gamma_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \rho^{-1} \partial_z \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_0^{-1} \mathcal{L}_{-1}^\# \mathcal{P}_0 &= \frac{i}{2\omega^2 \rho \gamma_0} \nabla_{\mathbf{x}'} \rho \cdot \mathbf{k}' \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{L}_0^\# \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0 &= \frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0^{-1} \nabla_{\mathbf{x}'} \left(\mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 \right) &= \gamma_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \gamma_0 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{P}_0^{-1} (\nabla_{\mathbf{k}'} \mathcal{P}_0 \nabla_{\mathbf{x}'} \mathcal{P}_0^{-1}) \mathcal{L}_0^\# \mathcal{P}_0 &= \frac{1}{2} \gamma_0^{-1} \nabla_{\mathbf{k}'} \gamma_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \gamma_0 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Annexe B

Détails des différentes composantes de l'algorithme

B.1 L'opérateur Γ_0 et l'opérateur de décomposition Γ_0^{-1}

Il s'agit de calculer l'action de Γ_0 sur un scalaire φ :

$$\langle \Gamma_0, \varphi \rangle (\mathbf{x}', z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} i\gamma_0(\mathbf{x}', z, \mathbf{k}') \varphi(\mathbf{y}') e^{i\omega\langle \mathbf{x}' - \mathbf{y}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{y}' d\mathbf{k}'. \quad (\text{B.1})$$

En ce qui concerne l'inverse de Γ_0 , le problème est plus délicat. En effet le symbole de Γ_0^{-1} est donné par un développement asymptotique de la forme :

$$\sigma(\Gamma_0^{-1}) \sim \sum_{j=1}^{+\infty} \zeta_j,$$

avec $\zeta_1 = \frac{1}{i\gamma_0}$. Pour simplifier le problème, on décide de ne conserver que le premier terme dans le développement.

En remplaçant γ_0 dans (B.1) par sa valeur approchée, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_0, \varphi \rangle (\mathbf{x}', z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{j=0}^n a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(\gamma_r(z; \mathbf{k}'))^{2j-1}} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{y}') e^{-i\omega\langle \mathbf{y}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{y}' \right) e^{i\omega\langle \mathbf{x}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

avec $(a_j)_{j=1,n}$ les coefficients du développement limité et $a_0 = 1$.

– Première étape : transformée de Fourier de φ par rapport à \mathbf{x}' ,

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{k}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{y}') e^{-i\omega\langle \mathbf{y}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{y}'.$$

- Deuxième étape : calcul des différentes quantités définissant l'ordre n de γ_0 ,

$$\forall j = 0, \dots, n, \quad \widehat{w}_j(z, \mathbf{k}') = \frac{\widehat{\varphi}(\mathbf{k}')}{(\gamma_r(z; \mathbf{k}'))^{2j-1}}.$$

L'équation (B.2) devient alors :

$$\langle \Gamma_0, \varphi \rangle(\mathbf{x}', z) = \sum_{j=1}^n a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{w}_j(z, \mathbf{k}') e^{i\omega \langle \mathbf{x}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{k}'. \quad (\text{B.3})$$

- Troisième étape : transformée de Fourier inverse de \widehat{w}_j .
- Quatrième étape : calcul de la somme pour obtenir $\langle \Gamma_0, \varphi \rangle$:

$$\langle \Gamma_0, \varphi \rangle(\mathbf{x}', z) = \sum_{j=1}^n a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j w_j(\mathbf{x}', z).$$

B.2 Calculs pour l'opérateur de réflexion

B.2.1 Séparation des variables \mathbf{k}' et \mathbf{x}'

L'opérateur de réflexion est déterminé par : $R = \frac{1}{2} \Gamma_0^{-1} \partial_z \Gamma_0$. Dans le cas où son expression est donnée à partir du logarithme (voir chapitre 5), le symbole de R est :

$$\begin{aligned} \sigma(R) &\simeq \frac{c(\mathbf{x}', z^-) - c(\mathbf{x}', z^+)}{\Delta z (c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-))} - \frac{c_r(z^-) - c_r(z^+)}{\Delta z (c_r(z^+) + c_r(z^-))} \\ &+ \frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}{\Delta z (\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'))} - \frac{1}{4\Delta z} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\ &+ \frac{1}{4\Delta z} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En choisissant la représentation intégrale d'un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est à variables séparées (voir chapitre 1), on a, pour une fonction-test φ :

$$\langle R, \varphi \rangle = \int e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \sigma_2(\mathbf{k}', z) \mathcal{F}(\sigma_1(\cdot, z) \varphi) d\mathbf{k}',$$

avec $\sigma(R) = \sigma_1(\mathbf{x}', z) \sigma_2(\mathbf{k}', z)$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle R, \varphi \rangle &= \left(\frac{c(\mathbf{x}', z^-) - c(\mathbf{x}', z^+)}{\Delta z (c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-))} - \frac{c_r(z^-) - c_r(z^+)}{\Delta z (c_r(z^+) + c_r(z^-))} \right) \varphi \\ &+ \int e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}{\Delta z (\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'))} \mathcal{F}(\varphi) d\mathbf{k}' \\ &- \int e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \mathcal{F} \left(\frac{1}{4\Delta z} \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \varphi \right) d\mathbf{k}' \\ &+ \int e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \mathcal{F} \left(\frac{1}{4\Delta z} \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \varphi \right) d\mathbf{k}' \end{aligned}$$

B.2.2 Algorithme

- Première étape : calcul des différentes quantités pour sommation sur j :

$$w_{0,0}(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}')$$

$$\forall j = 1, \dots, n \quad w_{1,j}(\mathbf{x}') = \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{4\Delta z_j} w_{0,0}(\mathbf{x}')$$

$$w_{2,j}(\mathbf{x}') = \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{4\Delta z_j} w_{0,0}(\mathbf{x}')$$

- Deuxième étape : transformée de Fourier des deux premières coordonnées :

$$\forall l = 1, 2 \quad \forall j = 0, \dots, n \quad \widehat{w}_{l,j}(\mathbf{k}') = \int w_{l,j}(\mathbf{x}') e^{-i\omega\langle \mathbf{x}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{x}'$$

- Troisième étape : calcul du nouveau champ d'onde dans le domaine fréquentiel :

$$\widehat{W}(\mathbf{k}') = \frac{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}{\Delta z (\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}'))} \widehat{w}_{0,0}(\mathbf{k}')$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left(- \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \widehat{w}_{1,j}(\mathbf{k}') + \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \widehat{w}_{2,j}(\mathbf{k}') \right)$$

- Quatrième étape : on fait une transformée de Fourier inverse pour avoir $W(\mathbf{x}')$.
Et on finit par ajouter les termes qui ne dépendent pas de \mathbf{k}' :

$$W(\mathbf{x}') = W(\mathbf{x}') + \left(\frac{c(\mathbf{x}', z^-) - c(\mathbf{x}', z^+)}{\Delta z (c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-))} - \frac{c_r(z^-) - c_r(z^+)}{\Delta z (c_r(z^+) + c_r(z^-))} \right) \varphi$$

B.3 Calculs pour l'opérateur de propagation

Le propagateur est défini par $G = (\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0 - \epsilon I_2 T)^{-1}$, avec $\epsilon \in \{0, 1\}$. On va ici séparer les deux cas. Dans un premier paragraphe, on regardera le cas $\epsilon = 1$ et dans le deuxième paragraphe, le cas $\epsilon = 0$.

B.3.1 L'opérateur de propagation : $G_{1,\pm}$

On note : $\Xi^\pm(\mathbf{x}', m) = G_{1,\pm}(z - \Delta z, z)$. Il s'agit ici de calculer $\langle \Xi^\pm, \varphi \rangle$ avec

$$\Xi^\pm(\mathbf{x}', m) = \exp \left[\int_{(m-1)\Delta z}^{m\Delta z} -i\omega\Gamma_0(\mathbf{x}', \zeta') d\zeta' \right] \exp \left[\pm \int_{(m-1)\Delta z}^{m\Delta z} T d\zeta' \right].$$

B.3.1.1 Séparation des variables \mathbf{k}' et \mathbf{x}'

D'après le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels, on a pour une fonction test φ :

$$\langle \Xi^\pm, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \sigma(\Xi^\pm) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (\text{B.6})$$

où $\sigma(\Xi^\pm) = \exp \left[\int_{(m-1)\Delta z}^{m\Delta z} -i\omega\gamma_0(\mathbf{x}', \zeta') d\zeta' \right] \exp \left[\pm \int_{(m-1)\Delta z}^{m\Delta z} \sigma(T) d\zeta' \right]$. On approche les deux intégrales dans les exponentielles par la méthode des rectangles, et on obtient :

$$\sigma(\Xi^\pm) \simeq \exp(-\Delta z i\omega\gamma_0(\mathbf{x}', (m-1)\Delta z)) \exp(\pm \Delta z \sigma(T)). \quad (\text{B.7})$$

Dans le chapitre sur la réflexion (chapitre 5), on a obtenu pour symbole de l'opérateur de réflexion $R = -T$. Donc :

$$\begin{aligned} \Delta z \sigma(T) &\simeq \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} - \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \\ &+ \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}')}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\ &- \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{\gamma_r^{2(N+1)}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Pour simplifier les écritures, on note :

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \\ &- \frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{j} \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\delta^{N+1}}{\gamma_r^{2(N+1)}} \right) \end{aligned}$$

On a vu que :

$$\gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') = \gamma_r(z; \mathbf{k}') + \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') \quad (\text{B.9})$$

avec

$$\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\delta(\mathbf{x}', z)^j}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}}$$

Le symbole de Ξ^\pm devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma(\Xi^\pm) &\simeq \exp \left(-i\omega \Delta z \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0) \pm \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} \mp \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)} \right) \\ &\times \exp \left(-i\omega \Delta z \gamma_r(z; \mathbf{k}') \pm \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}')}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')} \right) \\ &\times \exp(-i\omega \Delta z (\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0)) \pm \tau(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}')) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Dans l'équation (B.10), la première exponentielle ne dépend que de \mathbf{x}' et z , la seconde que de \mathbf{k}' et z et la troisième de \mathbf{x}' , \mathbf{k}' et z . C'est cette dernière exponentielle qui va

poser problème pour séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' . En fait, elles sont déjà séparées dans les termes $\tilde{\gamma}_0$ et τ mais sous la forme d'un produit d'une fonction de \mathbf{x}' et d'une fonction de \mathbf{k}' . On va donc approcher l'exponentielle par un développement de Taylor. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma(\Xi^\pm) &\simeq \exp\left(-i\omega\Delta z\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0) \pm \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} \mp \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)}\right) \\ &\times \exp\left(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}') \pm \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}')}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}\right) \\ &\times (1 - i\omega\Delta z(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0)) \pm \tau(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}')) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

On a ainsi pour l'opérateur Ξ appliqué à une fonction-test φ :

$$\begin{aligned} \langle \Xi^\pm, \varphi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[\exp\left(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}') \pm \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}')}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}\right) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \mathcal{F}(\psi) d\mathbf{k}' \right] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[\exp\left(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}') \pm \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}')}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}\right) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \right. \\ &\times \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{1}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}} - c_r(z)^{2j-1} \right) \mathcal{F}(-i\omega\Delta z a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j \psi) \right. \\ &\pm \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \mathcal{F}\left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{4j} \psi\right) \\ &\mp \left. \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \mathcal{F}\left(\frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{4j} \psi\right) \right] d\mathbf{k}' \end{aligned}$$

où

$$\psi = \exp\left(-i\omega\Delta z\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0) \pm \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} \mp \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)}\right) \varphi.$$

On peut remarquer que

$$\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0) = \gamma_0(\mathbf{x}', z; 0) - \gamma_r(z; 0) = \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)} - \frac{1}{c_r(z)} \right),$$

et on a alors pour ψ :

$$\psi = \exp\left(-i\omega\Delta z \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)} - \frac{1}{c_r(z)} \right) \pm \frac{c(\mathbf{x}', z^+) - c(\mathbf{x}', z^-)}{c(\mathbf{x}', z^+) + c(\mathbf{x}', z^-)} \mp \frac{c_r(z^+) - c_r(z^-)}{c_r(z^+) + c_r(z^-)}\right) \varphi$$

B.3.1.2 Algorithme

– Première étape : calcul des différentes quantités pour sommation sur j :

$$\begin{aligned} w_{0,0}(\mathbf{x}') &= \psi(\mathbf{x}') \\ \forall j = 1, \dots, n \quad w_{1,j}(\mathbf{x}') &= -i\omega\Delta z a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j w_{0,0}(\mathbf{x}') \\ w_{2,j}(\mathbf{x}') &= \frac{\delta(\mathbf{x}', z^+)^j}{4j} w_{0,0}(\mathbf{x}') \\ w_{3,j}(\mathbf{x}') &= \frac{\delta(\mathbf{x}', z^-)^j}{4j} w_{0,0}(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

– Deuxième étape : transformée de Fourier des deux premières coordonnées :

$$\forall l = 1, 2, 3 \forall j = 0, \dots, n \quad \widehat{w}_{l,j}(\mathbf{k}') = \int w_{l,j}(\mathbf{x}') e^{-i\omega \langle \mathbf{x}', \mathbf{k}' \rangle} d\mathbf{x}'$$

– Troisième étape : calcul du nouveau champ d'onde dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\mathbf{k}') &= \exp\left(-i\omega \Delta z \gamma_r(z; \mathbf{k}') \pm \frac{\gamma_r(z^-, \mathbf{k}') - \gamma_r(z^+, \mathbf{k}')}{\gamma_r(z^+, \mathbf{k}') + \gamma_r(z^-, \mathbf{k}')}\right) \\ &\times \left(\widehat{w}_{0,0}(\mathbf{k}') + \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{1}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}} - c_r(z)^{2j-1} \right) \widehat{w}_{1,j}(\mathbf{k}') \right. \right. \\ &\pm \left. \left(\frac{1}{(\gamma_r^+)^{2j}} - (c_r(z^+))^{2j} \right) \widehat{w}_{2,j}(\mathbf{k}') \right. \\ &\mp \left. \left. \left(\frac{1}{(\gamma_r^-)^{2j}} - (c_r(z^-))^{2j} \right) \widehat{w}_{3,j}(\mathbf{k}') \right) \right) \end{aligned}$$

– Quatrième étape : on fait une transformée de Fourier inverse pour avoir $W(\mathbf{x}')$.

B.3.2 L'opérateur de propagation : $G_{0,\pm}$

On note : $\Xi(\mathbf{x}', m) = G_{0,\pm}(z - \Delta z, z)$.

Il s'agit ici de calculer $\langle \Xi, \varphi \rangle$ avec

$$\Xi(\mathbf{x}', m) = \exp \left[\int_{(m-1)\Delta z}^{m\Delta z} -i\omega \Gamma_0(\mathbf{x}', \zeta') d\zeta' \right].$$

B.3.2.1 Séparation des variables \mathbf{k}' et \mathbf{x}'

D'après le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels, on a pour une fonction test φ :

$$\langle \Xi, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \sigma(\Xi) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \quad (\text{B.12})$$

où $\sigma(\Xi) = \exp \left[\int_{(m-1)\Delta z}^{m\Delta z} -i\omega \gamma_0(\mathbf{x}', \zeta') d\zeta' \right]$. On approche les deux intégrales dans les exponentielles par la méthode des rectangles, et on obtient :

$$\sigma(\Xi) \simeq \exp(-\Delta z i\omega \gamma_0(\mathbf{x}', (m-1)\Delta z)). \quad (\text{B.13})$$

On a vu que :

$$\gamma_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') = \gamma_r(z; \mathbf{k}') + \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') \quad (\text{B.14})$$

avec

$$\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\delta(\mathbf{x}', z)^j}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}}.$$

Le symbole de Ξ^+ devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma(\Xi) &\simeq \exp(-i\omega \Delta z \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0)) \exp(-i\omega \Delta z \gamma_r(z; \mathbf{k}')) \\ &\times \exp(-i\omega \Delta z (\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Dans l'équation (B.15), la première exponentielle ne dépend que de \mathbf{x}' et z , la seconde que de \mathbf{k}' et z et la troisième de \mathbf{x}' , \mathbf{k}' et z . C'est cette dernière exponentielle qui va poser problème pour séparer les variables \mathbf{x}' et \mathbf{k}' . En fait, elles sont déjà séparées dans le terme $\tilde{\gamma}_0$ mais sous la forme d'un produit d'une fonction de \mathbf{x}' et d'une fonction de \mathbf{k}' . On va donc approcher l'exponentielle par un développement de Taylor. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sigma(\Xi) &\simeq \exp(-i\omega\Delta z\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0)) \exp(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}')) \\ &\times (1 - i\omega\Delta z(\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; \mathbf{k}') - \tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0))). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On a ainsi pour l'opérateur Ξ appliqué à une fonction-test φ :

$$\begin{aligned} \langle \Xi, \varphi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[\exp(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}')) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \mathcal{F}(\psi) d\mathbf{k}' \right] \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[\exp(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}')) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} \right. \\ &\times \left. \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}} - c_r(z)^{2j-1} \right) \mathcal{F}(-i\omega\Delta z a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j \psi) d\mathbf{k}' \right] \end{aligned}$$

où $\psi = \exp(-i\omega\Delta z\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0)) \varphi$. On peut remarquer que $\tilde{\gamma}_0(\mathbf{x}', z; 0) = \gamma_0(\mathbf{x}', z; 0) - \gamma_r(z; 0) = \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)} - \frac{1}{c_r(z)} \right)$, et on a alors pour ψ :

$$\psi = \exp\left(-i\omega\Delta z \left(\frac{1}{c(\mathbf{x}', z)} - \frac{1}{c_r(z)} \right)\right) \varphi$$

Dans ce cas, le symbole de l'opérateur de propagation est l'exponentielle d'un imaginaire pur, donc a une norme égale à 1. Après l'approximation de l'exponentielle, cette norme n'est plus égale à 1, d'où la nécessité de normaliser $\sigma(\Xi)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle \Xi, \varphi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left[\exp(-i\omega\Delta z\gamma_r(z; \mathbf{k}')) \mathcal{F}(\psi) \right. \\ &\times \left. \mathcal{N} \left(1 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}} - c_r(z)^{2j-1} \right) \frac{\mathcal{F}(-i\omega\Delta z a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j \psi)}{\mathcal{F}(\psi)} \right) e^{i\mathbf{x}' \cdot \mathbf{k}'} d\mathbf{k}' \right] \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}(1 + p + iq) = e^{iq} \frac{1 + \frac{p}{1+iq}}{|1 + \frac{p}{1+iq}|}$.

B.3.2.2 Algorithme

– Première étape : calcul des différentes quantités de la somme sur j :

$$w_0(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}')$$

$$\forall j = 1, \dots, n \quad w_j(\mathbf{x}') = -i\omega\Delta z a_j \delta(\mathbf{x}', z)^j w_0(\mathbf{x}')$$

- Deuxième étape : transformée de Fourier des deux premières coordonnées :

$$\forall j = 0, \dots, n \quad \widehat{w}_j(\mathbf{k}') = \int w_j(\mathbf{x}') e^{-i\omega(\mathbf{x}', \mathbf{k}')} d\mathbf{x}'$$

- Troisième étape : calcul du nouveau champs d'onde dans le domaine fréquentiel :

$$\widehat{W}(\mathbf{k}') = \widehat{w}_0(\mathbf{k}') e^{-i\gamma_r(z; \mathbf{k}') \Delta z} \mathcal{N} \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\widehat{w}_j(\mathbf{k}')}{\widehat{w}_0(\mathbf{k}')} \left(\frac{1}{\gamma_r(z; \mathbf{k}')^{2j-1}} - c_r^{2j-1} \right) \right)$$

- Quatrième étape : on fait une transformée de Fourier inverse pour avoir $W(\mathbf{x}')$.

Bibliographie

- [1] K. AKI and P.G. RICHARDS. *Quantitative Seismology*. University Science Books, 2002. Second edition.
- [2] X. ANTOINE and H. BARUCQ . Microlocal diagonalization of strictly hyperbolic pseudodifferential systems and application to the design of radiation conditions in electromagnetism. *Siam J. on Appl. Math.*, 61(6) :1877–1905, 2001.
- [3] X. ANTOINE and H. BARUCQ . On the construction of approximate boundary conditions for solving the interior problem of the acoustic scattering transmission problem. in *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, Springer Series, Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 40 :133–140, 2004.
- [4] X. ANTOINE , H. BARUCQ , and A. BENDALI . Bayliss-Turkel-like radiation conditions on surface of arbitrary shape. *J. Math. Anal. Appl.*, 229 :184–211, 1999.
- [5] F.V. ATKINSON. Wave propagation and the Bremmer series. *J. Math. Anal. Appl.*, 1 :225–276, 1960.
- [6] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Construction et analyse d’approximations paraxiales en milieu hétérogène. I Approximation parabolique. *CMAP Ecole Polytechnique*, (114), octobre 1984.
- [7] A. BAMBERGER, B. ENGQUIST, L. HALPERN, and P. JOLY. Construction et analyse d’approximations paraxiales en milieu hétérogène. II Approximation d’ordre supérieur. *CMAP Ecole Polytechnique*, (128), mars 1985.
- [8] H. BARUCQ , B. DUQUET , and F. PRAT . The Bremmer series for parabolic approximation and the wave tracing method. preparing.
- [9] H. BARUCQ , B. DUQUET , and F. PRAT . A tracing waves method for the construction of Seismic Propagators. submitted.
- [10] E. BECACHE, A.S. BONNET BEN DHIA, and G. LEGENDRE. Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow. submitted.
- [11] E. BECACHE, A.S. BONNET BEN DHIA, and G. LEGENDRE. Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. *Siam, J. Numer. Anal.*, 42(1) :409–433, 2004.
- [12] R. BELLMAN and R. KALABA. Fonctionnal equations, wave propagation and invariant imbedding. *J. Math. Mech.*, 8 :683–704, 1959.

- [13] J.D. BENAMOU, O. LAFITTE, R. SENTIS, and I. SOLLIEC. A geometrical optics-based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near fold caustics—Part II. submitted.
- [14] J.D. BENAMOU, O. LAFITTE, R. SENTIS, and I. SOLLIEC. A geometrical optics-based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near fold caustics—Part I. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 156(1) :93–125, July 2003.
- [15] A. BENDALI and L. HALPERN. Conditions aux limites absorbantes pour le système de maxwell dans le vide en dimension trois d'espace. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math.*, 307 :1011–1013, 1988.
- [16] J.-P. BÉRENGER . A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J.Comput.Phys.*, 114 :185–200, 1994.
- [17] H. BREMMER. The W.K.B. Approximation as the First Term of a Geometrical-Optical Series. *Comm. Pure Appl. Math.*, 4 :105–115, 1951.
- [18] A. P. CALDERON and A. ZYGMUND. On the existence of certain singular integrals. *Acta. Math.*, 88 :85–139, 1952.
- [19] J. CHAZARAIN and A. PIRIOU. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. North-Holland, 1982.
- [20] J.F. CLAERBOUT . Coarse grid calculation of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure. *Geophysics*, 35 :407–418, 1970.
- [21] J.F. CLAERBOUT . *Numerical holography*, volume 3, pages 273–283. ed. A.F. Metherell, Plenum Press, 1971.
- [22] J.F. CLAERBOUT . Toward a unified theory of reflector imaging. *Geophysics*, 36 :467–481, 1971.
- [23] J.F. CLAERBOUT . *Fundamentals of geophysical data processing*. Mc Graw-Hill, New York, 1976.
- [24] J.F. CLAERBOUT . *Imaging the Earth's Interior*. Blackwell Scientific Publications, 1985.
- [25] F. COLLINO and P. MONK. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19 :2061, 1998.
- [26] J.P. CORONES . Bremmer Series that correct Parabolic Approximations. *J. Math. Anal. Appl.*, 50 :361–372, 1975.
- [27] J.P. CROISILLE and G. LEBEAU. Diffraction by an Immersed Elastic Wedge. *Lecture Notes in Mathematics, 1723*, Springer, 1999.
- [28] R. DAUTRAY and J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique*, volume 3. Masson, Paris, 1987.
- [29] C.G.M. DE BRUIN , C.P.A. WAPENAAR , and A.J. BERKHOUT . Angle-dependant reflectivity by means of prestack migration. *Geophysics*, 55(9) :1223–1234, September 1990.

- [30] M.V. DE HOOP. Generalizing of the Bremmer coupling series. *J. Math.Phys.*, 37 :3246–3282, 1996.
- [31] M.V. DE HOOP, J.H. LE ROUSSEAU, and R.S. WU. Generalization of the phase-screen approximation for the scattering of acoustic waves. *Wave Motion*, 31 :43–70, 2000.
- [32] C. DE WITTE-MORETTE, A. MAHESHAVARI, and B. NELSON. Path integration in non-relativistic quantum mechanics. *Physics Reports*, 50 :255–372, 1979.
- [33] B. DUQUET. *Amélioration de l'imagerie sismique de structures géologiques complexes*. PhD thesis, Université de Paris XIII, 1996.
- [34] A. DYNIN. A rigorous path integral construction in any dimension. *Letters in Mathematical Physics*, 44(4) :317–330, 1998.
- [35] V. FARRA . Ray Tracing in Complex Media. *J. of Applied Geophysics*, 30 :55–73, 1999.
- [36] V. FARRA . High-order perturbations of the phase velocity and polarization of qP and qS waves in anisotropic media. *Geophysical International Journal*, 147(1) :93, September 2001.
- [37] R.J. FERGUSON and G.F. MARGRAVE . Prestack depth migration by symmetric nonstationary phase shift. *Geophysics*, 67 :594–603, 2002.
- [38] J. GAZDAG . Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, 43 :1342–1351, 1978.
- [39] J. GAZDAG and P. SGUAZZERO . Migration of seismic data by phase shift plus interpolation. *Geophysics*, 49 :124–131, 1984.
- [40] R. GERMAIN. *Cours de Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1973.
- [41] S. H. GRAY. On the convergence of the time domain Bremmer series. *Wave Motion*, 5 :249–255, 1983.
- [42] M. GUSTAFSSON. The Bremmer series for a multi-dimensional acoustic scattering problem. *J. Phys. Math. Gen.*, 33(9) :1921–1932, 2000.
- [43] M. GUSTAFSSON. *Wave splitting in direct and inverse scattering problems*. PhD thesis, Lund University (Sweden), 2000.
- [44] L. HALPERN and J. RAUCH. Error analysis for absorbing boundary conditions. *Numer. Math.*, 51(4) :459–467, 1987.
- [45] C. HANITZSCH . Comparaison of weights in prestack amplitude-preserving Kirchhoff depth migration. *Geophysics*, 62 :1812–1816, 1997.
- [46] B. HANOUZET and M. SESQUÈS. Absorbing boundary conditions for maxwell's equations. *Notes on Dynamical Fluids, Numer. Fluid. Mech.*, 43 :315–322, 1993.
- [47] R.H. HARDIN and F.D. TAPPERT . Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave aquation. *SIAM Rev.*, 15, 1973.
- [48] L. HÖRMANDER. *The analysis of linear partial differential operators*, volume 3.& 4. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

- [49] J.A. HUDSON. A parabolic approximation for elastic waves. *Wave Motion*, 2 :207, 1980.
- [50] V. IVRII. Semiclassical microlocal analysis. téléchargeable à l'URL <http://www.math.toronto.edu/ivrii/Grads/MLAGradcourse.pdf>.
- [51] F.B. JENSEN , W.A. KUPERMAN , M.B. PORTER , and H. SCHMIDT. *Computational Ocean Acoustics, Modern Acoustics and Signal Processing*. R.T. Beyer Ed., New York, 1997.
- [52] T. KATO. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, New York, 1980.
- [53] H.B. KELLER and J.B. KELLER . Exponential-like solutions of systems of linear ordinary differential equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 10 :246–259, 1962.
- [54] B.L.N. KENNETT. Elastic Wave Propagation in Stratified Media. *Advances in Applied Mechanics*, 21 :79–167, 1981.
- [55] D. KIYASCHENKO , R.E. PLESSIX , and B. KASTAN. In *EAGE 66th Conference and exhibition*, Paris, 7-10 juin 2004.
- [56] J.J. KOHN and L. NIRENBERG. An algebra of pseudodifferential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :269–305, 1965.
- [57] D. KOMATITSCH and J. TROMP . A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation. *Geophysics, J. Int.*, 154 :146–153, 2003.
- [58] O. LAFITTE. Diffraction in the high frequency regime by a thin layer of dielectric material. I : the equivalent impedance boundary condition. *Siam, J. Appl. Math.*, 59(3) :1028–1052, 1999.
- [59] O. LAFITTE. The diffracted wave by a wedge with mixed boundary conditions. 88, *Mémoires de la SMF*, 2002.
- [60] T. LANDERS and J.F. CLAERBOUT. Numerical calculations of elastic waves in laterally inhomogeneous media. *J. Geophys. Res.*, 77 :1476–1482, 1972.
- [61] J.H. LE ROUSSEAU. *Microlocal analysis of wave-equation imaging and generalized-screen propagators*. PhD thesis, Center for Wave phenomena, Colorado School of Mines, 2001.
- [62] J.L. LIONS and E. MAGENES. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, volume 3 vol. Dunod, Paris, 1968. English translation : Grund. Math. Wiss., Band 181,182, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [63] J.J. MC COY. A parabolic theory of stress wave propagation through inhomogeneous linearly elastic solids. *J. Appl. Mech.*, 44 :462–468, 1977.
- [64] H. MC MAKEN. On the convergence of the Bremmer series for the Helmholtz equation in 2d. *Wave Motion*, 8 :277–283, 1986.
- [65] P.L. STOFFA , J.T. FOKKEMA , R.M. DE LUNA FREIRE , and W.P. KESSINGER . Split-step Fourier migration. *Geophysics*, 55 :410–421, 1992.

-
- [66] M.E. TAYLOR. *Pseudo-differential operators*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [67] F. TRÈVES. *Introduction to pseudodifferential and Fourier intergral operators*, volume 1.& 2. The University Series in Mathematics, Ed. J.J. Kohn, New York, 1980.
- [68] M.J.N. VAN STRALEN , M.V. DE HOOP , and H. BLOK . Generalized Bremmer series with rationnal approximation for the scattering of waves in inhomogeneous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104 :1943–1963, 1998.
- [69] Y. ZHANG , G. ZHANG , and N. BLEISTEIN . True amplitude wave equation migration arising from true amplitude one-way wave equations. *Inverse Problems*, 19 :1113–1138, 2003.